

密级：无 保密期限：无

北京邮电大学

硕士研究生学位论文



题目： 高质量频域模态参数识别方法研究
及模态分析软件实现

学 号： 026085

姓 名： 董书伟

专 业： 检测技术与自动化装置

导 师： 刘晓平教授、应怀樵教授

学 院： 自动化学院

2005年2月28日

董书伟
北京科尚仪器技术有限公司
KINGSCI INSTRUMENTS
www.chinaksi.com
dongsw@chinaksi.com
136 4117 1664

独创性（或创新性）声明

本人声明所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京邮电大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：_____ 日期：_____

关于论文使用授权的说明

学位论文作者完全了解北京邮电大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属北京邮电大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。（保密的学位论文在解密后遵守此规定）

保密论文注释：本学位论文属于保密在 5 年解密后适用本授权书。

本人签名：_____ 日期：_____

导师签名：_____ 日期：_____

高质量频域模态参数识别方法研究及模态分析软件实现

摘 要

模态参数识别是实验模态分析的核心,其中频域模态参数识别方法发展较早,优点显著,目前仍是模态分析的主流方法。本论文对新近出现的采用离散时间频域模型的最小二乘复频域法、其多参考点形式以及仅有输出响应情况下的算法进行了详尽的推导;对仅有输出响应情况下的算法做出了改进,以适用于环境激励中含有周期激励成分的情况;对最小二乘复频域法与最小二乘复指数法以及其它的频域法进行了算法比较;对软件实现过程中的有关数值计算问题进行了研究;给出了最小二乘复频域法—最小二乘频域法软件实现的算法流程。

在测试过程中,被测信号不可避免地受到噪声污染,进行模态参数识别时,为了保证识别参数的准确,需要对受污染的信号进行降噪处理。本论文研究了基于奇异值分解的降噪方法。提出了叠盖平均处理的方法,采用这种方法可以在保证降噪效果的前提下,降低算法的时间复杂度。针对重构 Hankel 矩阵过程中如何确定奇异值矩阵秩的难题,提出了由数据段内相干函数均值确定的经验阈值公式,由之可以自动确定矩阵秩;并采用数值仿真算例验证了方法的有效性。

本论文采用 **Matlab** 语言开发了模态分析软件系统 **E&OMAS**, 实现了文件管理、结构及自由度编辑、波谱显示、参数识别、模态模型验证、振型动画等功能。

本论文以圆板和三层框架结构模型作为分析对象,对软件的各项功能和本文提出的方法做了实验验证。结果表明本文提出的方法是合理有效的,所开发的软件具有可靠的功能。

关键字: 模态参数识别 最小二乘复频域法 环境激励 奇异值分解 降噪

INVESTIGATING HIGH QUALITY FREQUENCY-DOMAIN MODAL PARAMETER IDENTIFICATION TECHNIQUES AND IMPLEMENTATION OF MODAL ANALYSIS SOFTWARE

ABSTRACT

Modal parameter identification is the core of experimental modal analysis. Among all of the modal parameter identification techniques, the early developed frequency-domain ones have some advantages over others and are still the widely-used methods in modal analysis. In this thesis, the newly proposed Least-Squares Complex Frequency-Domain (LSCF) estimation method, which adopts a discrete-time domain model, its polyreference version and the output-only LSCF algorithm are reviewed in detail. A modified LSCF method is proposed, which can be used to carry out the identification problem whose ambient excitation includes the effect of purely harmonic vibrations. Comparison of the LSCF to the Least-Squares Complex Exponential (LSCE) estimator and other frequency-domain modal parameter extraction techniques is carried out, some numerical problems are investigated, and the flowchart for the LSCF-LSFD is given in the end.

It is inevitable that measured signals are contaminated with ‘noise’ when a data acquisition system is used for an experimental measurement. In order to get accurate results, dedicated filtering techniques are needed to improve the quality of the measured data. In this thesis, a method based on singular value decomposition (SVD) for the elimination of the noise is studied. Overlap averaging procedure is proposed to solve the problem of the high computation complexity in SVD-based de-noising. An empirical threshold formulation, a function of the coherence’s mean-value in the selected frequency segment, is investigated to determine the rank of the reconstructed SV matrix, which automates the rank choosing process. Finally a simulation example is introduced that illustrates the methods.

A software with Windows style graphical user interface for modal analysis, named Experimental & Operational Modal Analysis System (E&OMAS), is developed in Matlab language, which have abundant functions, such as file management, geometry & DOFs editor, pre-processing including FRF estimation and SVD-based de-noising, time history & spectral plot, modal parameter estimation, modal validation, modal normalization and modal shapes animation and so on.

A circular plate and a 3 story frame model are selected as analysis objects, in which modal tests are carried out to validate the functions of the software system and the methods proposed in this thesis. The numerical results confirm the effectiveness of the methods and the reliability of the software system.

KEY WORDS: modal parameter identification, least-squares complex frequency-domain estimation method, ambient excitation, singular value decomposition, de-noising

目 录

摘 要.....	III
ABSTRACT.....	V
第一章 绪 论	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究动态.....	2
1.2.1 简 介.....	2
1.2.2 模态参数识别研究动态.....	3
1.3 论文的主要研究内容.....	5
第二章 最小二乘复频域法	7
2.1 简 介.....	7
2.2 最小二乘复频域法.....	8
2.2.1 模型选择.....	8
2.2.2 加权最小二乘解.....	9
2.2.3 最小二乘正则方程组.....	11
2.2.4 对正则方程组进行求解.....	12
2.2.5 建立稳态图.....	14
2.2.6 通过 LSFDF 法估计留数.....	16
2.3 多参考点最小二乘复频域法.....	16
2.3.1 右矩阵分式模型.....	17
2.3.2 加权最小二乘解.....	17
2.3.3 最小二乘正则方程组.....	19
2.2.4 通过 LSFDF 法估计振型.....	21
2.4 单独利用响应数据的多参考点最小二乘复频域法.....	21
2.4.1 功率谱密度矩阵的模态分解.....	21
2.4.2 功率谱密度矩阵的经典谱估计.....	22
2.5 对环境激励下最小二乘复频域法的改进.....	24
2.6 算法比较.....	25
2.6.1 与 PRCE 进行比较.....	25
2.6.2 与其它频域法比较.....	26
2.7 LSCF-LSFDF 算法流程.....	27
第三章 基于奇异值分解的降噪方法研究	29
3.1 简 介.....	29
3.2 理论背景及降噪算法.....	29
3.3 叠盖平均处理及经验阈值公式.....	32

3.3.1 叠盖平均处理	32
3.3.2 经验阈值公式	33
3.4 数值仿真算例	35
第四章 软件实现	39
4.1 简介	39
4.2 E&OMAS 功能模块介绍	40
4.2.1 整体流程图	40
4.2.2 预处理	41
4.2.3 文件管理	41
4.2.4 编辑几何结构及自由度	41
4.2.5 波谱显示	41
4.2.6 模态参数识别	41
4.2.7 模态模型验证	41
4.2.8 模态振型动画显示	42
4.3 软件实现过程中数值计算的几个问题	42
4.3.1 恰定方程组的解	42
4.3.2 超定方程组的最小二乘解	42
4.3.3 振型求解的矩阵方程形式	43
4.3.4 扩阶处理补偿频带外模态影响	43
4.3.5 对频率轴进行归一化处理	44
4.3.6 采用模糊 C-均值聚类算法求取物理极点	44
4.3 软件界面示例	46
第五章 应用实例	47
5.1 简介	47
5.2 圆板	47
5.2.1 实验装置	47
5.2.2 数据采集	48
5.2.3 模态参数识别	50
5.3 三层框架结构模型	53
5.3.1 实验装置及数据采集	53
5.3.2 模态参数识别	54
第六章 总结与展望	59
6.1 总结	59
6.2 论文的创新点	59
6.2 进一步的工作	59
参考文献	61
致 谢	65
攻读学位期间发表的学术论文及参与的部分试验	67

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

模态参数（特征频率、阻尼比、模态振型等）识别是结构动力学中的一种“逆问题”，与传统的“正问题”分析方法（主要是有限元法）不同，是建立在实测的基础上，采用实验与理论分析相结合的方法来处理工程中的振动问题。它是系统辨识理论应用于振动结构产生的新的研究领域。这一技术从 1960 年代后期兴起至今，已在各工程领域中得到广泛应用，并已发展成为解决工程中振动问题的重要手段，时至今日，仍然是国内外振动工程学术界的一大热门^[1]。

结构振动的模态参数识别是实验模态分析的核心，其识别方法按照输入激振力是否可测分为传统的模态参数识别方法和基于环境激励的模态参数识别方法。

传统的模态参数识别方法的特点是采用人工激励，输入力可以控制和测量，在同时测量施加于系统的输入激振力和其输出响应后，利用激励信号和响应信号的信息进行参数识别，图 1-1a 给出一个利用电动力式激振器进行激励的示例^[2]。该方法已经在桥梁^[3]、航天^[4]、汽车^[5]、机床^[6]、汽轮机组^[7]等几乎所有和结构动态分析有关的领域中得到广泛应用。

在工程应用中，又提出了对于环境激励下的模态参数识别的需求，即激振力不可测，只能单独利用响应数据提取模态参数的问题，图 1-1b 给出了一个海浪及风对船舶进行激励的示例^[2]。单独利用响应数据提取模态参数有以下几个优势：一、对海洋平台、船舶、大桥、大坝、高层建筑、运载火箭等进行人工激励极其困难，如果可行，费用也非常昂贵，而且还有可能对结构造成局部或总体损坏。有时甚至不可实现，如海洋平台。在这种情况下，环境激励就成为了唯一可能的选择；二、直接从这些结构在工作中的振动响应数据识别出的模态参数更加符合实际情况和边界条件；三、实时响应数据和工作模态参数为在线监控和损伤识别开辟了一条途径；四、所需的实验条件（例如风、浪、交通激励、地脉动等）随时随地很容易满足，也无需影响被测机械或结构的正常工作，大大减少了实验所需费用（无需激励设备），简化了模态试验；五、能在线识别载荷，对于一些结构特别是航空、航天等大型结构，其所受的载荷（激励）往往无法直接测量，环境激励下的模态参数识别方法在识别工作模态参数的基础上可进行在线识别载荷；六、振动主动控制中传感器采样的信号应该在实际工作时获得，控制模型应该和系统工作时情况相符合，而利用工作中的振动响应数据中识别出的模态模型可以用于控制模型修正。



a.

b.

图 1-1 示例, a. 人工激励, b. 环境激励

Fig.1-1 Examples of a. forced excitation, b. ambient excitation

环境激励下的模态参数识别方法受到土木工程、建筑、航空、航天等领域中的专家、学者的极大重视。例如，美国 Sadia 国家实验室的 James G.H., et al. 在 1993 年提出了 NExT (Natural Excitation Technique) 法，并且将该方法成功地运用于汽轮机叶片在工作状态下的固有频率和模态阻尼测试^[8]。欧共体于 1997 年批准了以比利时鲁汶大学和英国帝国理工大学为主提出的 Euroke 项目 (No.1562, 'SINOPSYS', Modal Based Structural Monitoring Using In-operation System Identification)，其主要的内容之一就是环境激励下的模态参数识别，他们分别以航天器、轿车为对象进行了研究，并提出了子空间法识别模态参数^[9]。

环境激励下的结构模态参数识别方法在桥梁、建筑、航空、汽车、机床等领域都有广泛的应用前景，其理论及试验的研究，对促进模态分析理论的发展、促进其在国民经济以及国防工业中的应用，有着十分主要的理论和现实意义。

1.2 国内外研究动态

1.2.1 简介

模态参数识别最直接的理论来源就是系统辨识理论，近年来，它吸取了数字信号处理、数理统计、计算机、数值分析及自动控制理论等领域的有关“营养”，各种参数识别方法应运而生。由于模态参数识别方法涉及多个学科，目前尚无统一的分类方法。在实践中形成了多种分类方法：按照识别域区分，有频域法和时域法；在识别除振型以外的其它模态参数时，按照使用响应点的数目可分为局部识别和整体识别；按使用激励点和测量点的数目来分，有单输入单输出 (SISO) 法、单输入多输出 (SIMO) 法和多输入多输出 (MIMO) 法，SISO 属于局部识别法，SIMO 和 MIMO 属于整体识别法；在 SISO 频域模态参数识别中，按照模态密集程度的不同，可分为单自由度法

和多自由度法；根据使用的模型来分，有参数模型—模态模型、 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ 直接模型和非参数模型—多项式模型、自回归滑动平均模型（Auto-Regressive Moving-Average, ARMA）；按照模态阶数或可观测的模态数 N_m 与响应点数 N_o 之间的关系，直接模型法又可分为高阶完整模型和高阶不完整模型。

对于模态参数识别方法，如有理分式正交多项式法（Rational Fraction Orthogonal Polynomial, RFOP）^[10-12]、最小二乘频域法（Least-Squares Frequency-Domain, LSFD）^[13]、最小二乘复指数法（Least-Squares Complex Exponential, LSCE）^[13]、特征系统实现算法（Eigensystem Realization Algorithm, ERA）^[13]、频域分解法（Frequency-Domain Decomposition, FDD）^[14]、随机子空间法（Stochastic Subspace Identification, SSI）^[15]等在相应的参考文献中作者已经做了详尽的描述，本文不作赘述；对新近出现的最小二乘复频域法（Least-Squares Complex Frequency-Domain, LSCF）在本论文的第二章中将予以重点介绍并进行深入研究；另外还有基于时频分析、现代谱估计、神经网络以及遗传算法等的识别方法。

1.2.2 模态参数识别研究动态

1.2.3.1 发展基于统计，适用于大阻尼、模态密集的高效稳健快速算法

在文献[16]中，Allemang, R.J.指出了对模态参数估计方法的技术要求：发展基于统计的；对密集模态、大阻尼结构适用的；高效、稳健的快速算法；建立验证基准。之后的模态参数发展也验证了前面的三个要求^[17]。不过到今天为止，还没有建立一套被广泛认可的验证用的数据基准。通常的做法是采用那些高噪声、模态耦合严重的实验数据来检验识别方法的有效性，如采用带有内饰的汽车实验数据或飞机颤振实验数据^[17]。

1.2.3.2 发展自动识别技术

在进行模态参数识别时，需要操作者高度的参与。问题的关键在于如何正确地确定模型的阶数^[18]，不是所有求得的特征值都具有物理意义，有些是由于数学运算导致的，有些是由于数据中的噪声引起的。于是提出了“稳态图”的概念，尽管已经证明此法对于交互式地选择系统的物理极点已经够用，但是如何让这个过程自动进行是以后的重要研究领域之一，已经有人在这方面作了一些努力^[19,20]。

1.2.3.3 发展环境激励下的模态参数识别方法

另外一个重要的研究方向就是基于环境激励的模态参数识别^[21]。在这方面存在以下困难：一、如何得到质量归一化的振型；二、提高目前识别方法的鲁棒性，现有的方法大都是以白噪声激励为前提，在非白噪声下如何处理；三、环境激励响应信号频

带覆盖模态频带的程度，在什么样激励工作状况下测定响应最好；四、环境激励造成的结构非对称性如何处理；五、对时变的模态参数如何识别。关于环境激励激励能量大小的问题，目前还没有完善的衡量标准，需要进一步探讨。目前通常的环境激励的识别是考虑典型且具有代表性的工况来识别结构模态参数。由于环境激励响应信号成分复杂，通常是非平稳的，在未来的识别方法要充分利用信号处理技术，寻找新的识别方法，如利用时频分析方法的时变滤波与传统的识别方法结合使用，提高识别精度。

1.2.3.4 模态参数估计的统计分布研究

试验数据总是存在某种程度上的不确定性，那么从不同的数据样本中得到的模态参数总是存在差异。对这种差异来说，传统的处理方法是：假定模态参数本质上是确定性的，但它受到试验过程中的加性“误差”污染。如果假定为零均值高斯分布的随机误差，则模态参数估计的不确定度可用统计测度表示，如均值与标准偏差。模态参数估计的均值被定义为确定性的参数值，用统计置信区间表示随机误差。在文献[22]中，Doebbling, S.W., et al.将模态参数本身看作某些随机变量的一个实现，而不是受随机误差污染的确切值。这种方法的优点是：能够得到参数的某个范围，而不是仅仅估计出某个非常近似的确定值。

1.2.3.5 解决频域法中的泄漏问题

频域法发展较早，得到广泛的应用。其最大优点是：非参频响函数估计时利用频域平均技术显著地减少了数据量，最大限度地抑止了噪声影响。但是它的一个重要的缺点是：在使用随机信号如随机白噪声激励时，泄漏现象会对估计的参数带来不利影响。在文献[23]中，Pintelon, R., et al.证明了泄漏误差与瞬态现象的性质相似，它们都决定于输入信号及系统的动态特性，可以通过一个多项式形式的余项来对泄漏和瞬态现象进行建模。这一方法在一些频域模态参数识别方法中得到了应用^[24,25]。能否推广到其它的频域模态参数识别方法中去，是值得研究的问题之一。

1.2.2.6 处理短时、高含噪的试验数据

这个问题在飞机颤振试验中非常突出，颤振试验数据有如下基本特征：模态密集，模态参数有时变特性；响应信号的非平稳性；响应信号的低信噪比等^[26]。在文献[27]中，Vecchio, A., et al.首先对颤振试验数据利用小波方法进行滤波预处理，去掉了信号中的虚假分量，提高了信号的信噪比。可以说，发展更为先进的降噪算法是今后的研究方向之一。

1.2.2.7 处理不一致的数据

从测试的实际条件出发，当传感器的数量及采集通道少于感兴趣的自由度数量的时候，如对大型结构进行模态测试，就需要分批进行试验^[28,29]。这将带来一些问题：

如传感器附加质量的影响到被测结构的特性，使得不同批次测量的固有频率不一致；即使是在同批数据中，由于不符合 Maxwell 互易性原理，也会带来数据的不一致性，这意味着不能对这些数据进行整体参数估计。如何解决这个问题是研究方向之一。

1.3 论文的主要研究内容

模态参数识别是实验模态分析的核心，其中频域模态参数识别方法发展较早，理论成熟，优点显著，并且不断得到发展，目前仍是模态分析的主流方法。论文将对新近出现的最小二乘复频域方法进行深入研究。具体包括：①对最小二乘复频域法、其多参考点形式以及仅有输出响应情况下的算法进行详尽的推导；②对仅有输出响应情况下的算法做出改进，以适用于环境激励中含有周期激励成分的情况；③对最小二乘复频域法、最小二乘复指数法以及其它的频域法进行算法比较；④对其软件实现过程中的有关数值计算问题进行研究。

在测试过程中，被测信号不可避免地受到噪声污染，进行模态参数识别时，为了保证识别参数的准确，需要对受污染的信号进行降噪处理。本文将对基于奇异值分解的降噪方法进行研究。具体包括：①在保证降噪效果的前提下，为了降低算法的时间复杂度，提出一种叠盖平均处理的方法；②针对在重构 Hankel 矩阵过程中如何确定奇异值矩阵秩的问题，提出一个由数据段内相干函数均值确定的经验阈值公式；③采用数值仿真算例验证方法的有效性。

利用 MATLAB 语言开发模态分析软件系统 **E&OMAS**，具体功能包括：文件管理、结构及自由度编辑、预处理（传递函数估计、SVD 降噪）、波谱显示、参数识别、模态模型验证、模态归一、振型动画等。

最后以圆板和三层框架结构模型作为分析对象，对软件中各项功能的可靠性以及文中提出方法的有效性进行实验验证。

第二章 最小二乘复频域法

2.1 简介

与时域法相比较,频域法有如下几个特殊的优点:一、数据量减小:大量的时域采样点被少量的谱线代替;二、易于消除噪声:可以去掉没有激出的(噪声)谱线;三、利用离散 Fourier 变换计算频谱时,频域噪声为渐进复正态分布(当时域采样点数趋于无穷时);四、无需进行系统初始状态估计;五、易于将不同的试验数据合成在一起;六、分析频带可选;可进行频率加权;七、能够近似频带外模态的影响。

在频域中进行模态参数识别时,有两种模型可选择:连续时间频域模型,即 Laplace 变量 $s = j\omega_k$; 或者离散时间频域模型,即 Z 变量 $z = e^{-j\omega_k T_s}$ 。

对采用连续时间模型的频域方法,如 Levi 法,其系数矩阵是 Vandermonde 形式的,在进行宽频带和高阶模型分析时,容易出现病态,因为在频域方程中频率值是按频率幂运算的形式上升的。为了降低矩阵病态,可采用如下的办法^[30]:一、引入了无量纲频率,即对频率进行归一化处理;二、分频段拟合;三、降低模型阶数;四、利用正交多项式,如 Forsythe 多项式,对应的算法为有理分式正交多项式法^[10-12],但带来的问题是计算量大,高阶模型时问题更加突出。

模态参数估计过程通常采用两个步骤完成^[13]:一、估计整体参数—系统极点(和模态参与因子)。为此,广泛使用的是最小二乘复指数法(Least-Squares Complex Exponential method, LSCE)。通过对阶数递增的模型进行计算,利用求得的结果建立“稳态图”,操作者根据稳态图,将物理极点(相应于系统的某阶模态)从计算极点中分离出来;二、估计局部参数—模态向量。为此,最小二乘频域法(Least-Squares Frequency-Domain method, LSFDF)最为通行,将选中的极点(和模态参与因子)代入到极点-留数模态模型后利用最小二乘法来估计模态振型。这种估计方法通常称作 LSCE-LSFDF 法,是当前工程应用中最为普遍的方法之一,实际已经证明它可以处理大部分的模态参数识别问题。但这个方法有一些缺点,首先,抗干扰能力较差,对于信噪比差的测试数据,稳态图比较紊乱;其次,得不到模态参数估计的不确定度边界;还有就是,当输入参考点数量较多时,如 3 个,多参考点 LSCE 的性能就很差^[31]。因此,还期待新的算法出现。

近来,最小二乘复频域法(Least-Squares Complex Frequency-Domain method, LSCF)被提了出来,它采用的是离散时间频域模型。其特点是:运算速度快,对大阻尼、模态密集情况适用,可以进行宽频带分析,抗噪声干扰能力强^[32],并且已经推

广出多参考点形式^[33,34]，以及适用于环境激励下的相应算法^[35]。此法一经提出，就在工程中得到了广泛的应用^[17,31-36]。然而，通过查阅最新文献，尚未见国内有相关的研究论文或应用实例发表。因此，对这种算法进行较为深入的研究，解决算法实现过程中的数值计算问题，与现有的成熟算法进行比较，并推广这种算法就显得极有价值。

本章将对最小二乘复频域法、其多参考点形式，以及仅有输出响应情况下的算法进行详尽推导；对仅有输出响应情况下的最小二乘复频域法作出改进，以适用于环境激励中含有周期激励信号的情况；对最小二乘复频域法、最小二乘复指数法及其它的频域法进行算法比较；同时对实现过程中的快速算法进行研究；实现过程中采用了通行的两步做法：先用 LSCF 法估计出整体参数—极点（模态参与因子），再用 LSFD 法估计局部参数—模态振型；最后给出了 LSCF-LSFD 的算法流程。

2.2 最小二乘复频域法

2.2.1 模型选择

最小二乘复频域法（Least-Squares Complex Frequency-Domain estimator, LSCF）的出发点是频响函数的标量矩阵分式（或称为同分母模型），输出 o ($o=1, \dots, N_o$) 与输入 i ($i=1, \dots, N_i$) 之间的频响函数为：

$$H_k(\omega_f) = \frac{N_k(\omega_f)}{D(\omega_f)} \quad (2-1)$$

对任意的 $k=1, 2, \dots, N_o N_i$ （其中 $k=(o-1) \cdot N_i + i$ ）来说，输出 o 与输入 i 之间的分子多项式为：

$$N_k(\omega_f) = \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega_f) B_{kj}$$

同分母多项式为：

$$D(\omega_f) = \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega_f) A_j$$

式中， n 为多项式的阶数。

多项式基底函数 $\Omega_j(\omega_f)$ 的模型有多种：离散时间模型、连续时间模型，甚至可以是某些特定形式的多项式，如 Forsythe 正交多项式^[12]。不管采取哪种模型，待估的参数都是实值系数 A_j 和 B_{kj} 。对离散时间频域模型来说， $\Omega_j(\omega_f)$ 通常通常写成如下形式：

$\Omega_j(\omega_f) = \exp(-i\omega_f T_s \cdot j)$, 其中 T_s 为采样时间间隔; 而对连续时间频域模型来说,

$\Omega_j(\omega_f) = \left(\frac{i\omega_f}{\omega_s} \right)^j$, 其中 $\omega_s = \frac{(\omega_1 + \omega_{N_f})}{2}$ 是改善方程组数值条件的归一化因子^[37]。

利用离散时间频域模型可以得到方程组的稳定解。从使用最小二乘复指数法的经验来看, 正则方程组(即所谓的协方差矩阵)以及用于求解极点的友矩阵(Companion Matrix)的数值条件不构成大的问题。这是选择离散时间频域模型的原因之一, 其它的原因在后面部分将予以说明。

2.2.2 加权最小二乘解

线性最小二乘求解对于模型方程组的要求是: 方程关于被估的参数是线性的。将式(2-1)中的模型 $H_k(\omega_f)$ 用测量值 $\hat{H}_k(\omega_f)$ 代替, 并在等式两端同时乘以分母多项式, 得到:

$$\sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega_f) B_{kj} - \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega_f) \hat{H}_k(\omega_f) A_j \approx 0 \quad (2-2)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, N_o N_i$ (其中 $k = (o-1) \cdot N_i + i$), $f = 1, \dots, N_f$ 。对式(2-2)中的每个方程进行适当的加权处理, 可以改善最小二乘估计的结果^[32]。式(2-2)关于待估的参数是线性的, 将其组合成如下矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 & Y_2 \\ \dots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_{N_o N_i} & Y_{N_o N_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_o N_i} \\ \alpha \end{bmatrix} \approx 0 \quad (2-3)$$

简写为:

$$[J] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_o N_i} \\ \alpha \end{bmatrix} \approx 0$$

这个最小二乘问题的复值 Jacobi 矩阵 J 为:

$$[J] = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & Y_2 \\ \cdots & & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{N_o N_i} & Y_{N_o N_i} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

式中,

$$\beta_k = \begin{bmatrix} B_{k0} \\ B_{k1} \\ \vdots \\ B_{kn} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} X_k(\omega_1) \\ \vdots \\ X_k(\omega_{N_f}) \end{bmatrix}, \quad Y_k = \begin{bmatrix} Y_k(\omega_1) \\ \vdots \\ Y_k(\omega_{N_f}) \end{bmatrix}$$

$$X_k(\omega_f) = W_k(\omega_f) [\Omega_0(\omega_f), \Omega_1(\omega_f), \cdots, \Omega_n(\omega_f)]$$

$$Y_k(\omega_f) = -X_k(\omega_f) \cdot \hat{H}_k(\omega_f)$$

$$k = (o-1) \cdot N_i + i = 1, \cdots, N_o N_i$$

复值 Jacobi 矩阵 J 有 $N_f N_o N_i$ 行, $(n+1)(N_o N_i + 1)$ 列, 其中 $N_f \gg n$, n 为多项式的阶数。因为式 (2-2) 中的每个方程用 $W_k(\omega_f)$ 加权过, 所以 Jacobi 矩阵中的 X_k 是不相同的。加权函数可以采用如下形式^[32]:

$$W_k^2 = \frac{|\hat{H}_k(\omega_f)|^2}{\text{var}\{\hat{H}_k(\omega_f)\}} \quad (2-5)$$

方差 $\text{var}\{\hat{H}_k(\omega_f)\}$ 可由相干函数得到。

为了得到实值系数, 必须将复值 Jacobi 矩阵转换为实值矩阵, 可采用如下方法进行:

$$J_{\text{Re}} = \begin{bmatrix} X_1^{\text{Re}} & 0 & \cdots & 0 & Y_1^{\text{Re}} \\ 0 & X_2^{\text{Re}} & \cdots & 0 & Y_2^{\text{Re}} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{N_o N_i}^{\text{Re}} & Y_{N_o N_i}^{\text{Re}} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

式中, $X_k^{\text{Re}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(X_k) \\ \text{Im}(X_k) \end{bmatrix}$, $Y_k^{\text{Re}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(Y_k) \\ \text{Im}(Y_k) \end{bmatrix}$ 。

这个最小二乘问题可以通过对 J_{Re} 进行 QR 分解的办法进行求解。

2.2.3 最小二乘正则方程组

如果直接从 Jacobi 矩阵出发进行估计, 会得到一个良态问题。但很多模态参数识别方法的做法是将正则方程组显式地表达出来, 即直接计算 $J_{\text{Re}}^T J_{\text{Re}} = \text{Re}(J^H J)$, 这样可以实现快速算法。下面来解释这种实现方法:

对 $J^H J$ 进行计算, 得到:

$$J^H J = \begin{bmatrix} X_1^H X_1 & 0 & \cdots & X_1^H Y_1 \\ 0 & X_2^H X_2 & \cdots & X_2^H Y_2 \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^H Y_1 & Y_2^H Y_2 & \cdots & \sum_{k=1}^{N_s N_f} Y_k^H Y_k \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

式中,

$$\begin{aligned} [X_k^H X_k]_{rs} &= \sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f)|^2 \Omega_{r-1}^H(\omega_f) \Omega_{s-1}(\omega_f) \\ [Y_k^H Y_k]_{rs} &= \sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f) \hat{H}_k(\omega_f)|^2 \Omega_{r-1}^H(\omega_f) \Omega_{s-1}(\omega_f) \\ [X_k^H Y_k]_{rs} &= -\sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f)|^2 \hat{H}_k(\omega_f) \Omega_{r-1}^H(\omega_f) \Omega_{s-1}(\omega_f) \end{aligned}$$

如果是采用离散时间频域模型, 即 $\Omega_j(\omega_f) = \exp(-i\omega_f T_s \cdot j)$, 并且等间隔采样, 则频率为一致分布, 即 $\omega_f = f \cdot \Delta\omega$, $\Delta\omega = 2\pi/NT_s$, 那么上面的求和形式可写为:

$$\begin{aligned} [X_k^H X_k]_{rs} &= \sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f)|^2 e^{i2\pi(r-s)f/N} \\ [Y_k^H Y_k]_{rs} &= \sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f) \hat{H}_k(\omega_f)|^2 e^{i2\pi(r-s)f/N} \\ [X_k^H Y_k]_{rs} &= -\sum_{f=1}^{N_f} |W_k(\omega_f)|^2 \hat{H}_k(\omega_f) e^{i2\pi(r-s)f/N} \end{aligned} \quad (2-8)$$

定义如下序列:

$$\begin{aligned} XX_k(n) &= \begin{cases} |W_k(\omega_n)|^2 & n=1, \dots, N_f \\ 0 & n=0, N_f+1, \dots, N-1 \end{cases} \\ YY_k(n) &= \begin{cases} |W_k(\omega_n) \hat{H}_k(\omega_n)|^2 & n=1, \dots, N_f \\ 0 & n=0, N_f+1, \dots, N-1 \end{cases} \\ XY_k(n) &= \begin{cases} -|W_k(\omega_n)|^2 \hat{H}_k(\omega_n) & n=1, \dots, N_f \\ 0 & n=0, N_f+1, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2-9)$$

可见,

$$\begin{cases} \left[X_k^H X_k \right]_{rs} = FXX_k(r-s) \\ \left[Y_k^H Y_k \right]_{rs} = FYY_k(r-s) \\ \left[X_k^H Y_k \right]_{rs} = FXY_k(r-s) \end{cases} \quad (2-10)$$

式中,

$$\begin{aligned} FXX_k(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} XX_k(n) e^{i2\pi mn/N} \\ FYY_k(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} YY_k(n) e^{i2\pi mn/N} \\ FXY_k(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} XY_k(n) e^{i2\pi mn/N} \end{aligned}$$

是前面所定义序列的离散 Fourier 变换, 可以利用快速 Fourier 变换算法进行计算。其中矩阵 $X_k^H X_k$ 、 $Y_k^H Y_k$ 、 $X_k^H Y_k$ 为 Toeplitz 结构的矩阵, 根据 Toeplitz 矩阵的对称性, 不需要对矩阵中的每个元素进行计算, 同时也可节约存储空间。

2.2.4 对正则方程组进行求解

考虑到 $J_{\text{Re}}^T J_{\text{Re}} = \text{Re}(J^H J)$, 利用式 (2-7), 式 (2-8), 正则方程组可写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & S_1 \\ 0 & R_2 & \cdots & S_2 \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^H & S_2^H & \cdots & \sum_{k=1}^{N_o N_i} T_k \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_o N_i} \\ \alpha \end{Bmatrix} \approx 0 \quad (2-11)$$

其中, $R_k = \text{Re}(X_k^H X_k)$, $S_k = \text{Re}(X_k^H Y_k)$, $T_k = \text{Re}(Y_k^H Y_k)$ 。

为了得到非平凡解, 必须对多项式的系数进行约束。这可以通过将某个系数置为常数, 如置为 1 (为最小二乘问题), 或将系数向量的范数置为 1 (为整体最小二乘问题) 来实现。

正则矩阵的行数远小于 Jacobi 矩阵的行数, 但其维数还是相当可观: $(n+1)(N_o N_i + 1)$ 行, $(n+1)(N_o N_i + 1)$ 列。因为主要关心的是: 如何快速、稳定地建立稳态图。而建立稳态图, 事实上只须要知道 α 系数向量 (就可进而求得极点) 就已足矣。在这个情况下, 可以把 β 系数从最小二乘方程组中消去。消去 β 系数:

$$\beta_k = -R_k^{-1} \cdot S_k \cdot \alpha \quad (2-12)$$

得到如下的紧凑形式：

$$\left[\sum_{k=1}^{N_o N_i} T_k - S_k^T \cdot R_k^{-1} \cdot S_k \right] \cdot \alpha \approx 0 \quad (2-13)$$

简写为： $M \cdot \alpha \approx 0$ ，式中，

$$M = \sum_{k=1}^{N_o N_i} T_k - S_k^T \cdot R_k^{-1} \cdot S_k \quad (2-14)$$

紧凑形式的 M 方阵维数为 $n+1$ ，远小于正则矩阵的维数 $(n+1)(N_o N_i + 1)$ 。假定将 α 向量中的最后一个系数，即第 $n+1$ 个系数 A_n 置 1。在这种情况下， α 的最小二乘解为：

$$\alpha_{LS} = \begin{Bmatrix} -[M(1:n,1:n)]^{-1} \cdot \{M(1:n,n+1)\} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

对于 α 系数向量存在 $n+1$ 种约束情况，每种情况对应于将 α 系数向量中某个元素置 1。在文献[31]中，Verboven, P., et al. 对不同的约束情况进行了研究，得出的结论是：当对第 $n+1$ 个系数置 1 时，稳态图最为清晰。一旦 α 系数向量已知，就可以利用式 (2-12) 求得所有 β 系数。这样求解 α 、 β 系数的方法与直接对式 (2-11) 进行求解的方法相比，效率更高，大约快 $N_o N_i$ 倍。

当分母多项式系数 α 确定之后，极点可从其友矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} V = V\Lambda \quad (2-16)$$

求出。

矩阵 $\Lambda \in C^{n \times n}$ 的对角线元素是极点 $e^{-\lambda_i T_s}$ 。它们与特征频率 $\omega_i [rad/s]$ 和阻尼比 ξ_i 的关系如下：

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \omega_i \pm j \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i \quad (2-17)$$

2.2.5 建立稳态图

由于存在噪声（如测量噪声，计算噪声等）以及可能的建模误差，为了得到所有的物理模态，需要将模型阶数 n 取得足够大。但模型超定又会引入很多的计算极点，这会使模态参数估计的过程变得复杂。为了帮助操作者将物理极点从计算极点中分离出来，可以建立所谓的“稳态图”^[13,30]，示例见图 2-1，随着模型阶数的增加，对应的极点显示在频率轴上，一般来说，随着模型阶数递增，物理极点趋于稳定；而计算极点比较紊乱。能够快速建立稳态图是当今对于模态参数识别算法的要求之一。

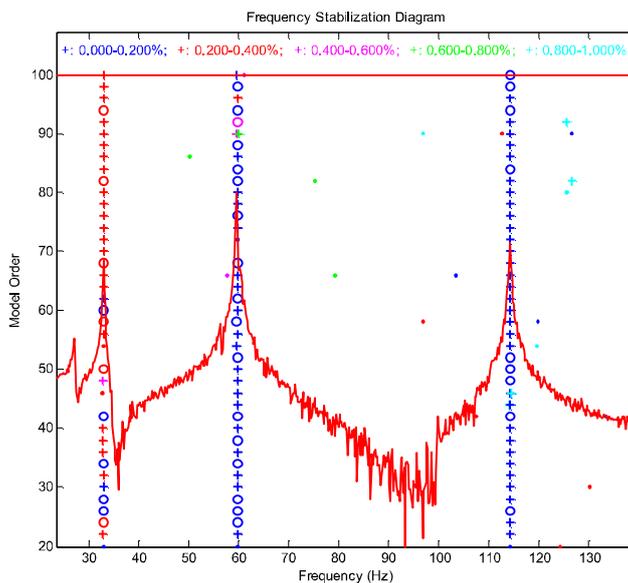


图 2-1 稳态图示例

Fig.2-1 Example of stabilization diagram

为了建立稳态图，必须将模型阶数递增时对应的极点估计出来。可以通过如下方法快速实现。根据 $n+1$ 维 M 方阵， $M = \sum_{k=1}^{N_a N_j} T_k - S_k^T \cdot R_k^{-1} \cdot S_k$ 的特点，对维数不断增加的 M 方阵的子矩阵进行特征值求解，这样就可以得到分母多项式阶数递增的一系列 α 系数向量的最小二乘解（进而求得极点），在这个过程中分子多项式保持为确定的最大模型阶数。下面对此进行解释。

图 2-2 表示出了对于不同阶的分母多项式时，最小二乘方程组的紧凑形式与完全形式之间的关系，其中分子多项式为确定的最大模型阶数。从式（2-14）可以看出，如果在 M 方阵中去掉 $n-j$ 行与列的元素，与在完全形式方程组的系数矩阵中去掉 S_k 子矩阵的 $n-j$ 列的元素并且同时去掉 T_k 子矩阵的 $n-j$ 行与列的元素是完全等效的。

在这个过程中， R_k 子矩阵保持不变，故而分子多项式一直保持为最大模型阶数 n 。其结果是：对这个紧凑形式的特征值问题进行求解得到的结果与对完全形式的方程组进行求解得到的结果是相同的（此时，方阵 M 的维数是 $j+1$ ），因为对于两种求解形式，所用的子矩阵是相同的。

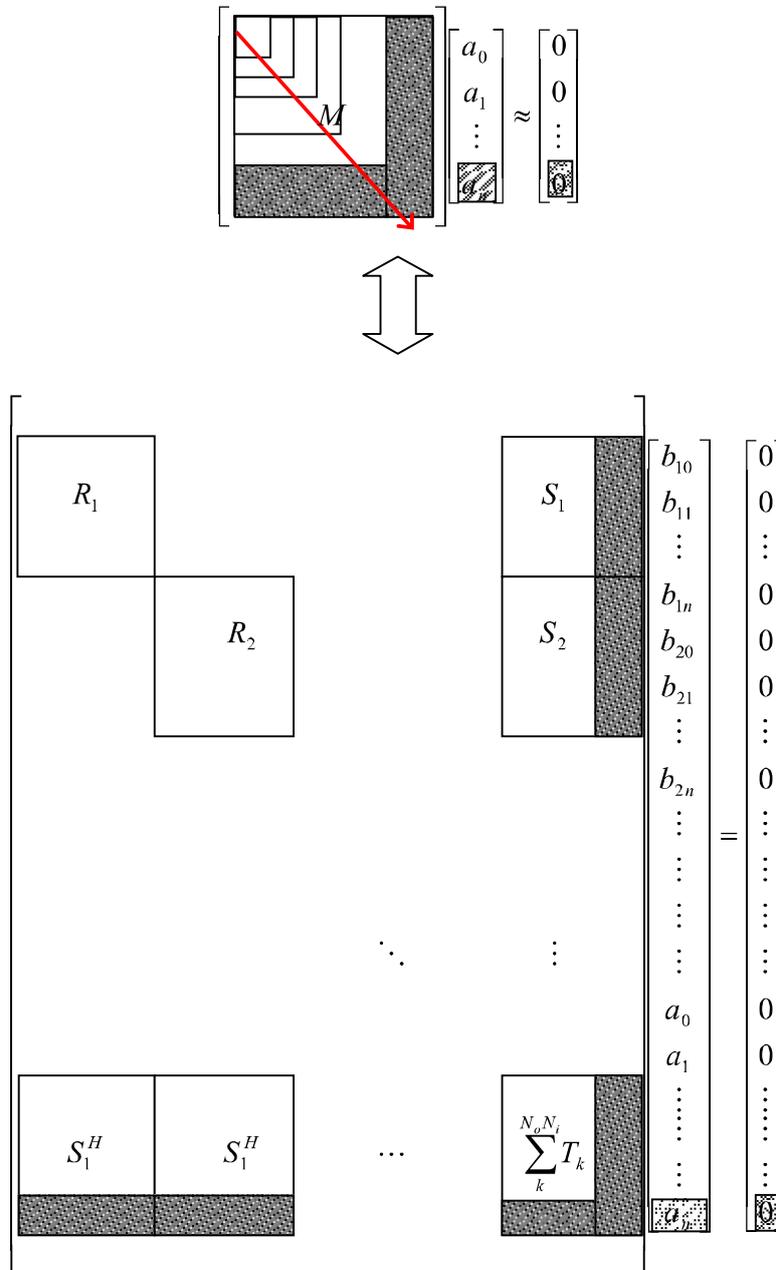


图 2-2 紧凑形式与完全形式的最小二乘方程组之间的关系

Fig.2-2 Relation between compact and full LS equations

2.2.6 通过 LSFD 法估计留数

一旦 α 系数向量已知，就可以利用式 (2-12) 求得所有 β 系数，在分子、分母多项式已知的情况下，就可以求得模态向量。但本文采用的是通行的两步估计过程：第一步先求出系统极点，第二步再估计模态向量。在第二步估计中，采用最常用的最小二乘频域法 (Least-Squares Frequency-Domain method, LSFD)^[13]。极点-留数模态模型的基本方程为：

$$[H(\omega)]_{N_o \times N_i} = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{[R_r]}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{[R_r^*]}{(i\omega - \lambda_r^*)} \right) + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2} \quad (2-18)$$

式中， N_m 为模态阶数， \bullet^* 表示取复共轭， $[R]$ 为留数矩阵， $[UR]$ 为上余项矩阵， $[LR]$ 为下余项矩阵。上余项近似反映处于频带范围以上的那些模态的影响，下余项近似反映处于频带范围以下的那些模态的影响。有一点需要指出，时域法不能考虑这些频带以外模态的影响。

在稳态图的辅助下，可以确定系统的物理极点 λ_r ，将其代入式 (2-18) 以后，它就变成了关于其它未知参数，即留数和上、下余项的线性方程，可按照最小二乘意义进行求解。

留数矩阵 $[R_r]$, $r = 1, 2, \dots, N_m$ 求出后，可进一步利用奇异值分解方法求得模态振型 $\{\psi_r\}$ 和模态参与因子 $\langle L_r \rangle$ ：

$$[R_r] = U \Sigma V^T \quad (2-19)$$

假定 $\text{rank}([R_r]) = 1$ ，则 U 矩阵的第一列代表模态振型向量 $\{\psi_r\}$ ， V^T 矩阵的第一行代表模态参与因子向量 $\langle L_r \rangle^T$ 。

2.3 多参考点最小二乘复频域法

在使用最小二乘复频域法时，发现有如下的缺点：一、将留数矩阵分解为秩为 1 的矩阵时，发现求得的频响综合结果与原始测量数据有误差；二、建立稳定图时，只能利用极点信息（模态频率及阻尼比），而不能利用模态参与因子信息，这样就导致了相邻较近的极点误为同一个极点。为解决这两个问题，提出了多参考点最小二乘复频域法 (Poly-Reference Least-Squares Complex Frequency-Domain method, PRCF)。它是最小二乘复频域法的多参考点形式。多参考点最小二乘复频域法的思想同最小二乘复频域法是相同的，也是从传递函数的右矩阵分式模型出发，经过线性化，利用最小二乘解的方法求得模型系数后，通过解友矩阵的特征值和特征向量求得极点和模态参与因子，而模态振型则是根据极点-留数模态模型利用最小二乘解得到的。

2.3.1 右矩阵分式模型

多参考点最小二乘复频域法需要频响函数作为输入数据源，并且建立如下的右矩阵分式模型：

$$[H(\omega)] = [B(\omega)][A(\omega)]^{-1} \quad (2-20)$$

式中 $H(\omega) \in C^{N_o \times N_i}$ 是频响函数矩阵，含有 N_i 个输入激励与 N_o 个输出响应之间的所有频响函数。 $B(\omega) \in C^{N_o \times N_i}$ 是分子矩阵多项式。 $A(\omega) \in C^{N_i \times N_i}$ 是分母矩阵多项式。右矩阵分式模型式 (2-20) 的每一行可写为：

$$\forall o = 1, 2, \dots, N_o : \langle H_o(\omega) \rangle = \langle B_o(\omega) \rangle [A(\omega)]^{-1} \quad (2-21)$$

将输出 o 的分子行向量多项式及分母矩阵多项式定义为：

$$\langle B_o(\omega) \rangle = \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega) \langle \beta_{oj} \rangle, \quad [A(\omega)] = \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega) [\alpha_j] \quad (2-22)$$

式中 $\Omega_j(\omega)$ 为多项式基底函数， n 为多项式的阶数，采用离散时间频域模型：

$$\Omega_j(\omega) = e^{-i\omega T_s \cdot j} \quad (2-23)$$

式中 T_s 为采样时间间隔。

将多项式系数 $\beta_{oj} \in R^{1 \times N_i}$ 及 $\alpha_j \in R^{N_i \times N_i}$ 组成如下的矩阵形式：

$$\beta_o = \begin{pmatrix} \beta_{o0} \\ \beta_{o1} \\ \dots \\ \beta_{on} \end{pmatrix} \in R^{(n+1) \times N_i} (\forall o = 1, 2, \dots, N_o), \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in R^{N_i(n+1) \times N_i}, \theta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{N_i} \\ \alpha \end{pmatrix} \in R^{(N_o + N_i)(n+1) \times N_i} \quad (2-24)$$

将频响函数模型式 (2-20) 记作系数 θ 的函数形式： $H(\omega_f, \theta)$ ，假定为实系数。

2.3.2 加权最小二乘解

现在的关键问题是如何根据频响函数的估计值 $\hat{H}_o(\omega_f)$ 求出模型系数 θ 。其中 $\hat{\cdot}$ 表示估计值， $\omega_f (f = 1, 2, \dots, N_f)$ 为频响函数的离散频率值。通过对非线性最小二乘 (Non-linear Least-Squares, NLS) 方程误差 $\varepsilon_o^{NLS}(\omega_f, \theta) \in C^{N_o \times N_i}$ 最小化的方法可以求得系数 θ ：

$$\begin{aligned}\varepsilon_o^{NLS}(\omega_f, \theta) &= W_o(\omega_f) \left(H_o(\omega_f, \theta) - \hat{H}_o(\omega_f) \right) \\ &= W_o(\omega_f) \left(B_o(\omega_f, \beta_o) A^{-1}(\omega_f, \alpha) - \hat{H}_o(\omega_f) \right)\end{aligned}\quad (2-25)$$

式中引入了标量加权函数 $W_o(\omega_f)$ ，这个与频率及输出相关的加权函数允许考虑不同输出之间数据的测量质量的好坏。将全部的输出及谱线处的方程误差合在一起，组成如下的标量成本函数：

$$\varepsilon^{NLS}(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left\{ \left(\varepsilon_o^{NLS}(\omega_f, \theta) \right)^H \varepsilon_o^{NLS}(\omega_f, \theta) \right\} \quad (2-26)$$

式中 \bullet^H 表示矩阵的复共轭转置（Hermitian 转置）， $\text{tr}\{\bullet\}$ 表示矩阵的迹（主对角线元素之和）。通过将式（2-26）对未知模型系数 θ 的导数置为零可以求得成本函数的极小值。显然，如果直接利用式（2-25），它将是关于模型系数 θ 的非线性方程组。那么在式（2-25）两边同时右乘分子矩阵多项式 A ，将这个非线性最小二乘问题转化为（次优的）线性最小二乘问题。

$$\begin{aligned}\varepsilon_o^{LS}(\omega_f, \theta) &= W_o(\omega_f) \left(B_o(\omega_f, \beta_o) - \hat{H}_o(\omega_f) A(\omega_f, \alpha) \right) \\ &= W_o(\omega_f) \sum_{j=0}^n \left(\Omega_f(\omega_f) \beta_{oj} - \Omega_j(\omega_f) \hat{H}_o(\omega_f) \alpha_j \right)\end{aligned}\quad (2-27)$$

式中 $\varepsilon_o^{LS}(\omega_f, \theta) \in C^{N_o \times N_i}$ 。

将所有谱线处的方程误差按矩阵 $E_o^{LS}(\theta) \in C^{N_f \times N_i}$ 形式组合起来：

$$E_o^{LS}(\theta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_o^{LS}(\omega_1, \theta) \\ \varepsilon_o^{LS}(\omega_2, \theta) \\ \dots \\ \varepsilon_o^{LS}(\omega_{N_f}, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o & Y_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

式中，

$$\begin{aligned}X_o &= \begin{pmatrix} W_o(\omega_1) \left(\Omega_0(\omega_1) \cdots \Omega_n(\omega_1) \right) \\ \dots \\ W_o(\omega_{N_f}) \left(\Omega_0(\omega_{N_f}) \cdots \Omega_n(\omega_{N_f}) \right) \end{pmatrix} \in C^{N_f \times (n+1)} \\ Y_o &= \begin{pmatrix} -W_o(\omega_1) \left(\Omega_0(\omega_1) \cdots \Omega_n(\omega_1) \right) \otimes \hat{H}_o(\omega_1) \\ \dots \\ -W_o(\omega_{N_f}) \left(\Omega_0(\omega_{N_f}) \cdots \Omega_n(\omega_{N_f}) \right) \otimes \hat{H}_o(\omega_{N_f}) \end{pmatrix} \in C^{N_f \times N_i(n+1)}\end{aligned}\quad (2-29)$$

式中， \otimes 表示 Kronecker 积^[38]。

2.3.3 最小二乘正则方程组

与式 (2-27) 类似, 对线性化后的方程误差来说, 有如下的成本函数:

$$\varepsilon^{LS}(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left\{ \left(\varepsilon_o^{LS}(\omega_f, \theta) \right)^H \varepsilon_o^{LS}(\omega_f, \theta) \right\} \quad (2-30)$$

这是一个加权最小二乘问题, 利用式 (2-28), 式 (2-29), 上式可写为:

$$\begin{aligned} \ell^{LS}(\theta) &= \sum_{o=1}^{N_o} \text{tr} \left\{ \left(E_o^{LS}(\theta) \right)^H E_o^{LS}(\theta) \right\} \\ &= \sum_{o=1}^{N_o} \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \beta_o^T & \alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_o^H \\ Y_o^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_o & Y_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \theta^T J^H J \theta \right\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

式中, $J \in \mathbb{C}^{N_o N_f \times (N_o + N_i)(n+1)}$ 即所谓的 Jacobi 矩阵, 写为如下形式:

$$J = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & Y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{N_o} & Y_{N_o} \end{pmatrix} \quad (2-32)$$

在系数 θ 为实数的情况下, 可用实部 $\text{Re}(J^H J) \in \mathbb{R}^{(N_o + N_i)(n+1) \times (N_o + N_i)(n+1)}$ 代替 $J^H J$, 则成本函数式 (2-31) 变为:

$$\ell^{LS}(\theta) = \text{tr} \left\{ \theta^T \text{Re}(J^H J) \theta \right\} \quad (2-33)$$

式中,

$$\text{Re}(J^H J) = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 & S_1 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 & S_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{N_o} & S_{N_o} \\ S_1^T & S_2^T & \cdots & S_{N_o}^T & \sum_{o=1}^{N_o} T_o \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_o + N_i)(n+1) \times (N_o + N_i)(n+1)} \quad (2-34)$$

式中,

$$\begin{aligned} R_o &= \text{Re}(X_o^H X_o) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \\ S_o &= \text{Re}(X_o^H Y_o) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times N_i(n+1)} \\ T_o &= \text{Re}(Y_o^H Y_o) \in \mathbb{R}^{N_i(n+1) \times N_i(n+1)} \end{aligned} \quad (2-35)$$

将式 (2-33) 对未知模型系数 θ 的导数置为零, 可以求得成本函数的极小值:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell^{LS}(\theta)}{\partial \beta_o} &= 2(R_o \beta_o + S_o \alpha) = 0, \quad \forall o = 1, \dots, N_o \\ \frac{\partial \ell^{LS}(\theta)}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{o=1}^{N_o} (S_o^T \beta_o + T_o \alpha) = 0\end{aligned}\quad (2-36)$$

这就是所谓的正则方程组，利用式 (2-34)、式 (2-24)，它可写为如下形式，

$$2 \operatorname{Re}(J^H J) \theta = 0 \quad (2-37)$$

在第一步中，我们感兴趣的只是分母多项式系数 α ，由之可以求得极点和模态参与因子，利用这些信息足以建立稳态图。接下来，从式 (2-36) 中消去系数 β_o ：

$$\beta_o = -R_o^{-1} S_o \alpha \quad (2-38)$$

得到紧凑形式的正则方程组，

$$\left\{ 2 \sum_{o=1}^{N_o} (T_o - S_o^T R_o^{-1} S_o) \right\} \alpha = 0 \Leftrightarrow M \alpha = 0 \quad (2-39)$$

其中 $M \in \mathbb{R}^{N_i(n+1) \times N_i(n+1)}$ 如上式所定义，如第 2.2 节所示，可从测量的频响函数估计中利用快速算法求得 M 。由此式可以得到分母多项式 α 。为了避免得到平凡解 $\alpha = 0$ ，添加如下的约束条件：

$$\alpha_n = I_{N_i} \quad (2-40)$$

其中 I_{N_i} 是 $N_i \times N_i$ 阶的单位阵。这个约束条件同样去掉了右矩阵分式模型中存在的参数冗余性。其余的分母多项式系数通过求解如下的最小二乘问题得到：

$$M(1:N_i n, 1:N_i n) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = -M(1:N_i n, N_i n+1:N_i(n+1)) \quad (2-41)$$

当分母多项式系数 $[\alpha_j]$ 确定之后，极点和模态参与因子可从其友矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -[\alpha_0^T] & -[\alpha_1^T] & \dots & -[\alpha_{n-2}^T] & -[\alpha_{n-1}^T] \end{pmatrix} V = V \Lambda \quad (2-42)$$

求出。

$V \in \mathbb{C}^{N_i n \times N_i n}$ 的最后 N_i 行是模态参与因子；极点 $e^{-\lambda_i T_s}$ 是矩阵 $\Lambda \in \mathbb{C}^{N_i n \times N_i n}$ 的对角线

元素。它们与特征频率 ω_i [rad/s] 和阻尼比 ξ_i 的关系如下：

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \omega_i \pm j\sqrt{1-\xi_i^2} \omega_i \quad (2-43)$$

建立稳态图的方法与第 2.2.5 节的方法类似，不再赘述。

2.2.4 通过 LSF 法估计振型

模态振型可从如下的极点-留数模态模型求得：

$$[H(\omega)]_{N_o \times N_i} = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{\{\psi_r\} \langle L_r^T \rangle}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\psi_r^*\} \langle L_r^H \rangle}{(i\omega - \lambda_r^*)} \right) + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2} \quad (2-44)$$

式中， N_m 为模态阶数， \bullet^* 、 \bullet^T 、 \bullet^H 分别表示对 \bullet 取复共轭、转置和复共轭转置。 $\{\psi_r\} \in C^{N_o}$ 为模态振型， $\langle L_r^T \rangle \in C^{N_i}$ 为模态参与因子， $[UR]$ 为上剩余项矩阵， $[LR]$ 为下剩余项矩阵。

在稳态图的辅助下，可以确定系统极点 λ_r 和模态参与因子 $\langle L_r^T \rangle$ ，然后将之代入式 (2-44)，式 (2-44) 就变成了关于模态振型 $\{\psi_r\}$ 和上、下剩余项 $[UR]$ 、 $[LR]$ 等未知参数的线性方程组，可按照最小二乘意义进行求解。

2.4 单独利用响应数据的多参考点最小二乘复频域法

2.4.1 功率谱密度矩阵的模态分解

对于一个 n 自由度的线性时不变系统，如果用 $\{f(t)\}$ 表示在连续时间 t 时的 $(n \times 1)$ 维的输入激振力向量，而用 $\{x(t)\}$ 表示 $(n \times 1)$ 维的输出响应位移向量，则输出和输入之间的 $(n \times n)$ 维的频响函数矩阵 $[H(\omega)]$ 为：

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & \cdots & H_{1n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & \cdots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

根据模态分析的理论，式 (2-45) 的模态分解式为：

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{\{\psi_r\} \langle L_r^T \rangle}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\psi_r^*\} \langle L_r^H \rangle}{(i\omega - \lambda_r^*)} \right) \quad (2-46)$$

式中符号的代表含义同式 (2-44)。

而对于环境激励下的情况来说，输入激励是无法测量的，也就不可能求得频响函数矩阵 $[H(\omega)]$ ，在这种情况下，用输出响应之间的互功率谱密度矩阵代替频响函数矩阵 $[H(\omega)]$ ^[34]。对于平稳随机过程 $\{f(t)\}$ 来说，输出响应之间的 $(n \times 1)$ 维互功率谱密度矩阵 $[S_{XX}(\omega)]$ 为：

$$[S_{XX}(\omega)] = [H(\omega)][S_{FF}(\omega)][H(\omega)]^H \quad (2-47)$$

式中， $[S_{FF}(\omega)]$ 为不可测量的输入激振力的互功率谱密度矩阵。将式 (2-46) 代入式 (2-47)，并假定输入激励为白噪声，则 $[S_{FF}(\omega)]$ 为常数矩阵，那么很容易得到输出响应的互功率谱密度矩阵的模态分解式：

$$[S_{XX}(\omega)] = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{\{\psi_r\}\langle Q_r^T \rangle}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\psi_r^*\}\langle Q_r^H \rangle}{(i\omega - \lambda_r^*)} + \frac{\{\psi_r\}\langle Q_r^T \rangle}{(-i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\psi_r^*\}\langle Q_r^H \rangle}{(-i\omega - \lambda_r^*)} \right) \quad (2-48)$$

式中， $\{\psi_r\}$ ， $\{Q_r\}$ 分别为第 r 阶模态的工作模态振型和参考点向量。参考点向量 $\{Q_r\}$ 是输入激振力的互功率谱密度矩阵 $[S_{FF}(\omega)]$ 和结构模态参数的复值函数。因为无法确定模态参与因子，所以无法对工作模态振型 $\{\psi_r\}$ 进行质量归一。

在单独利用响应数据的多参考点最小二乘复频域法中，只要利用输出响应之间的互功率谱密度矩阵 $[S_{XX}(\omega)]$ 代替频响函数矩阵 $[H(\omega)]$ 即可。其余的步骤跟第 2.3 节完全类似，不再赘述。

这种方法的缺点之一是：为了得到输出响应之间互功率谱密度矩阵准确的非参估计，必须测得足够的数据量。

2.4.2 功率谱密度矩阵的经典谱估计

经典谱估计有两种方法：直接法，又称周期图法；间接法，又称相关图法。

2.4.2.1 周期图法

将一个 $(N_o \times 1)$ 维离散时间域的响应输出测量值的向量记为 $\{x_m\}$ ， $(m = 0, 1, \dots, M-1)$ ，其中 N_o 为响应信号的数量， m 为离散时刻点。将包含 N_{ref} 个输出响应的 $\{x_m\}$ 子集记为 $\{x_m\}_{ref}$ ，把它作为参考点响应。周期图法的基本思想是将每个包含 M 个样本点的响应测量数据序列分成 P 个不交叠的数据段，每个数据段中包含 D 个样本点， $DP \leq M$ 。对每个数据段 s ($s = 0, 1, \dots, P-1$) 来说，被 $(D \times 1)$ 维时间窗向

量 $\{w\}$ 加权过的信号向量 $\{x_m\}$ 的离散 Fourier 变换为:

$$\{F_{\{x_k\}}^s(\omega)\} = T \left(\sum_{k=0}^{D-1} \{w_k\} \{x_{sD+k}\} e^{-j\omega kT} \right) \quad (2-49)$$

响应与参考点响应之间的互功率谱密度矩阵估计为:

$$\{S(\omega)\} = \frac{1}{P} \sum_{s=0}^p \{S^s(\omega)\} \quad (2-50)$$

$$\{S^s(\omega)\} = \{F_{\{x_k\}}^s(\omega)\} \{F_{\{x_k\}_{ref}}^s(\omega)\}^{H} \quad (2-51)$$

利用时间窗 $\{w\}$, 如 Hanning 窗进行加权处理, 或者增加数据段中的样本点数 D 都能减小泄漏带来的影响, 而且增加样本点数 D 能够提高频率分辨率。但另一方面, 增加样本点数 D 就意味着平均的次数 P 减小, 这又会使估计的不确定度增加, 即方差增大。在实践中, 必须在这相互矛盾的两个方面之间作出折中。

2.4.2.2 相关图法

长度为 M 的响应信号 x_m 与参考点响应信号 x_m^{ref} 之间的离散时域的无偏相关估计为:

$$R(\tau) = \frac{1}{M-\tau} \sum_{m=0}^{M-\tau-1} x_{(m+\tau)} x_r^{ref} \quad (2-52)$$

其中, $0 \leq \tau \leq M-1$, 而对 $-(M-1) \leq \tau < 0$ 来说,

$$R(\tau) = \frac{1}{M-|\tau|} \sum_{m=0}^{M-|\tau|-1} x_m x_{(m+|\tau|)}^{ref} \quad (2-53)$$

可以利用快速 Fourier 变换计算卷积。对式 (2-52)、式 (2-53) 进行 Fourier 变换得到功率谱密度函数估计:

$$S(\omega) = T \sum_{\tau=-M}^M w_\tau R(\tau) \exp(-j\omega\tau T) \quad (2-54)$$

其中, $\{w\}$ 是长度为 $(2M+1)$ 的时间窗。为了减小噪声及泄漏影响, 建议使用关于零点对称的双边时间指数窗: $\{w_m\} = \exp(-\beta|m|T)$, 其中 β 为衰减因子。

2.5 对环境激励下最小二乘复频域法的改进

需要着重指出的是：对环境激励下的模态参数识别方法来说，输入激励被假定为平稳白噪声。但实际情况并非总是如此，如，激励中除含有白噪声信号外，还含有旋转部件引起的周期激励信号。因为存在周期激励（Harmonic Excitation），违反了白噪声激励假设，则识别方法可能会失去鲁棒性，导致识别的模态参数不准确。

对于响应信号中的周期强迫响应分量来说，一个最直接的方法就是将其看作是具有零阻尼的名义模态（Virtual Mode）的响应信号。则进行模态参数识别时，会得到阻尼很小（理论上为零）的固有频率。

事实上，因为存在与结构模态接近的周期信号，则通常情况下，当模型的阶数增加时，识别出的模态参数的收敛性很差。模态密集，问题尤甚。

可以利用数字滤波器将周期信号成分从响应信号中滤掉。但是，滤波器不是理想的，并且如果周期信号频率与特征频率很接近时，滤波将会对测量的信号造成损坏，从而使识别的模态参数不准确。

在文献[39,40]中，Mohanty, P., & Rixen, D.J.分别对特征系统实现算法和最小二乘复指数法作了改进：将周期激励信号的频率作为已知的特征根（阻尼为零）显式地包含在识别过程中，起到了很好的效果。下面将这种思想推广到最小二乘复频域法中来。

当周期激励信号的频率 ω_r 已知时， $z_r = e^{\pm i\omega_r T_s} = \cos(\omega_r T_s) \pm i \sin(\omega_r T_s)$ 将是同分母多项式 $D(\omega_f) = \sum_{j=0}^n \Omega_j(\omega_f) A_j$ 的特征根，写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_r T_s) & \sin(\omega_r T_s \cdot 2) & \cdots & \sin(\omega_r T_s \cdot (n-1)) & \sin(\omega_r T_s \cdot n) \\ 1 & \cos(\omega_r T_s) & \cos(\omega_r T_s \cdot 2) & \cdots & \cos(\omega_r T_s \cdot (n-1)) & \cos(\omega_r T_s \cdot n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix} = 0 \quad (2-55)$$

即：

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_r T_s) & \sin(\omega_r T_s \cdot 2) & \cdots & \sin(\omega_r T_s \cdot (n-1)) & \sin(\omega_r T_s \cdot n) \\ 1 & \cos(\omega_r T_s) & \cos(\omega_r T_s \cdot 2) & \cdots & \cos(\omega_r T_s \cdot (n-1)) & \cos(\omega_r T_s \cdot n) \end{bmatrix} \cdot \alpha = 0 \quad (2-56)$$

针对一般情况，假设在感兴趣的频段内有 m 个周期激励频率，将式 (2-56) 与式 (2-13) 组合在一起，得到：

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega_1 T_s) & \sin(\omega_1 T_s \cdot 2) & \cdots & \sin(\omega_1 T_s \cdot (n-1)) & \sin(\omega_1 T_s \cdot n) \\ 1 & \cos(\omega_1 T_s) & \cos(\omega_1 T_s \cdot 2) & \cdots & \cos(\omega_1 T_s \cdot (n-1)) & \cos(\omega_1 T_s \cdot n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sin(\omega_m T_s) & \sin(\omega_m T_s \cdot 2) & \cdots & \sin(\omega_m T_s \cdot (n-1)) & \sin(\omega_m T_s \cdot n) \\ 1 & \cos(\omega_m T_s) & \cos(\omega_m T_s \cdot 2) & \cdots & \cos(\omega_m T_s \cdot (n-1)) & \cos(\omega_m T_s \cdot n) \\ & & & & M & \end{bmatrix} \cdot \alpha = 0 \quad (2-57)$$

式中，

$$M = \sum_{k=1}^{N_a N_i} T_k - S_k^T \cdot R_k^{-1} \cdot S_k \quad (2-14)$$

简写为：

$$Matr \cdot \alpha = 0 \quad (2-58)$$

式中， $Matr \in R^{(2m+n+1) \times (n+1)}$ ，如果假定 $A_n = 1$ ，则 α 的最小二乘估计 α_{LS} 为：

$$\alpha_{LS} = \left\{ \begin{array}{c} -(\text{subMatr}^T \cdot \text{subMatr})^{-1} \cdot \text{subMatr}^T \cdot \{\text{Matr}(1:2m+n, n+1)\} \\ 1 \end{array} \right\} \quad (2-59)$$

式中， $\text{subMatr} = \text{Matr}(1:(2m+n), 1:n)$ 。

多项式的根中将含有周期激励信号频率，因为已经强制地把它包含进来了。

2.6 算法比较

下面将对多参考点最小二乘复频域法 (PRCF) 与多参考点最小二乘复指数法 (PRCE) 以及其它频域法进行算法比较。

2.6.1 与 PRCE 进行比较

PRCF 的算法思想与 PRCE 是相同的：

- ◆ 根据最大模型阶数，建立线性方程组，按照最小二乘法估计出矩阵多项式系数 $[\alpha]$ ；

- ◆ 按照模型阶数递增的顺序，求解特征值问题，根据特征频率、阻尼比、模态参与因子信息建立稳态图；
- ◆ 在稳态图的辅助下，选择物理极点，根据极点-留数模态模型，采用最小二乘频域法对模态振型进行最小二乘估计。

二者之间的差别在于第一步，PRCE 利用脉冲响应函数求解多项式系数，而 PRCF 则利用频响函数。这看起来很小的差别对于模态参数估计的过程有着重要影响。后面的工程实例将表明，PRCF 的稳态图异常清晰，这就简化了极点选择的难题。而在 PRCE 法的稳态图中，非物理极点（有时甚至是物理极点）会比较紊乱，高阶时尤其如此。PRCF 法有个特点：非物理极点的阻尼为负值，那么就可以将它们提前排除，不在稳态图上出现。通常认为对于大阻尼的情形频域法更适用，而对小阻尼情况，时域法效果更好^[13]，第三章的仿真算例将说明，对于小阻尼的情况，PRCF 效果同样良好。

2.6.2 与其它频域法比较

如本章第 2.1 节简介所述，采用连续时间模型的频域估计时，通常需要对一个包含频率轴幂运算的矩阵进行求逆运算，这将会出现矩阵病态，为了避免这个问题，就必须对频带宽度及模型阶数进行限制^[13]。为此，提出了有理分式正交多项式(RFOP)方法^[10-12]，但这又带来了新的问题：计算量大，内存要求高。

PRCF 不会受数值问题的困扰，因为采用的是离散时间频域模型，在 PRCF 中，频段 f_0 到 f_{end} 之间的频率轴被平移并映射到复平面的单位半圆上：

$$z = e^{-i\omega T_s}, \quad \omega = 2\pi(f - f_0), \quad T_s = \frac{1}{2(f_{end} - f_0)} \quad (2-60)$$

与其它频域法相同，PRCF 法中同样需要对包含频率轴幂运算的矩阵进行求逆运算。从数值分析的角度来看，PRCF 法主要的优点在于对 z 变量进行幂运算不会增加数值的范围，因为它是在复平面上旋转： $z^r = e^{-i\omega T_s \cdot r}$ 。这样的结果就是：采用 PRCF 可以进行宽频带，高模型阶数分析。

通常认为的频域法数值条件不如时域法、不能进行宽频带分析的观点是针对连续时间频域模型讲的，对离散时间频域模型来讲不适用，这点应该予以澄清。

2.7 LSCF-LSFD 算法流程

最小二乘复频域法-最小二乘频域法 (LSCF-LSFD) 的算法流程如图 2-3 所示, 大致可以分为以下几个具体步骤:

1. 根据频响函数以及加权函数计算, 构建 Toeplitz 矩阵 R_k , S_k , T_k , [式 (2-10)、式 (2-11)];
2. 构建紧凑形式的正则方程组系数矩阵 M , [式 (2-143)];
3. 按照最小二乘意义求解 α 系数, [式 (2-15)];
4. 对友矩阵进行特征分解, 求得特征根, [式 (2-16)];
5. 用系数矩阵 M 的子矩阵代替 M , 重复步骤 3., 4., 并建立特征根矩阵;
6. 按照制定的过滤准则, 对特征根进行过滤, 舍去不稳定的根;
7. 构建稳态图 (第 2.2.5 节);
8. 在稳态图上选取物理极点, 在所开发软件 **E&OMAS** 中有两种选择: 一、基于模糊 C-均值聚类算法 (Fuzzy C-Means Clustering, FCM) 的方法; 二、手动选择;
9. 将选中的物理极点代入极点-留数模态模型, 按照最小二乘意义进行模态向量估计, [式 (2-18)];
10. 模态模型验证: 根据频响函数之和, 模态指示函数, 模态置信准则, 模型相位共线性, 频响函数综合, 振型动画视觉检查等工具对识别出的模态参数进行检查^[3];
11. 重复第 2 步—第 10 步直到得出最佳选择。

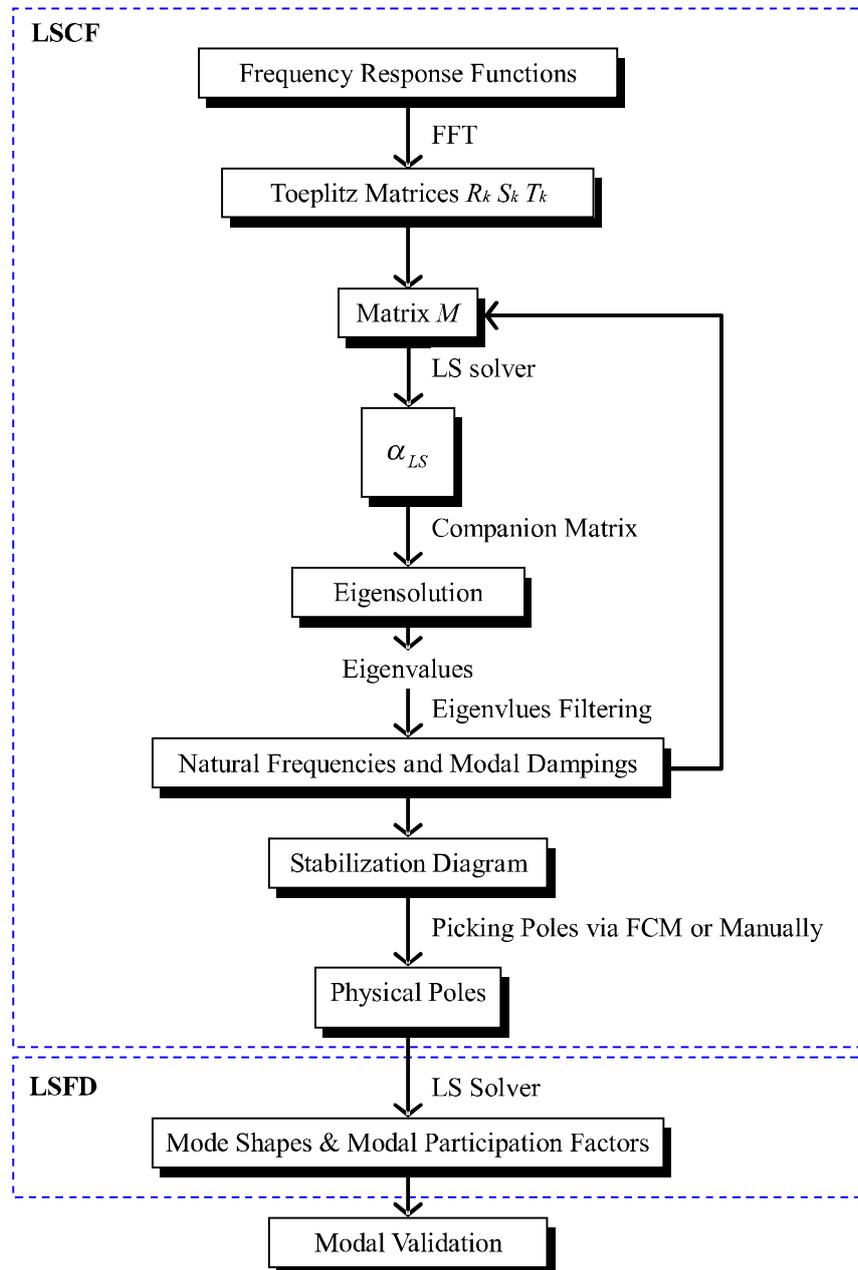


图 2-3 LSCF-LSFD 的算法流程图

Fig.2-3 Flowchart for the LSCF-LSFD method

第三章 基于奇异值分解的降噪方法研究

3.1 简介

在信号采集的过程中,被测信号不可避免地受到噪声的污染。噪声来源复杂多样,主要源于测试环境包括非线性影响、外部结构噪声以及电子设备内部噪声等。尽管在采集过程中可以采取硬件滤波、屏蔽等措施来降低噪声,但是要想得到不受噪声污染的信号是不切实际的。在进行系统参数识别时,为了保证识别参数的准确,需要对污染的信号进行预处理。常用的预处理办法是基于统计学原理,对同一被测信号进行重复测量,采用统计平均的方法消除随机误差,提高信噪比。这样带来的问题是增加测量时间,同时该方法还要求在具体测量时,必须保证被测对象和测量环境的一致性,对此,现场测试情况有时难以保证。例如,飞机颤振试验中由于飞行器飞行的高度、速度、飞行姿态的不同,在一段时间,不能保证状态参数的不变。为了消除其随机误差采用的统计平均是没有意义的,另外现场测试数据有限,即使测量数据在同一状态下可以测量,但要进行平均也难以实现^[41]。因此,需要采用新的方法滤除噪声。在文献[42]中, Sanliturk, K.Y.提出了一种基于奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)的方法来对频响函数进行降噪处理,效果良好。

这种方法在使用时有两个困难:一、当矩阵为方阵或接近方阵并且矩阵维数取的高时,降噪效果更好,但带来的问题是计算量大,处理起来非常耗时;二、如何确定奇异值矩阵的秩。本章针对这两个问题提出解决办法:一、提出叠盖平均处理的办法,降低时间复杂度;二、在重构 Hankel 矩阵的过程中,为了自动确定奇异值矩阵的秩,提出根据当前频段内相干函数均值确定的经验阈值公式。最后采用一个三自由度系统的数值仿真算例对其有效性进行了验证。

3.2 理论背景及降噪算法

令 $[A]_{m \times n}$ 是一个 $m \times n$ 维矩阵,则 $[A]_{m \times n}$ 的奇异值分解为如下形式:

$$[A]_{m \times n} = [U]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [V]_{n \times n}^H \quad (3-1)$$

式中: $[U]$, $[V]$ 为酉阵, $[]^H$ 表示 Hermitain 转置, $[\Sigma]$ 为实对角阵,其对角线元素 λ_i 称为 $[A]_{m \times n}$ 的奇异值, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_R \geq 0$, $R = \min\{m, n\}$ 。如果有奇异值为零或低于某个阈值 ε ,称矩阵 $[A]_{m \times n}$ 为奇异的。从理论上讲,非零奇异值的个数 r 决定了此矩阵的秩,即: $\lambda_i > \varepsilon$; $i = 1, \dots, r$; $\lambda_i \leq \varepsilon$; $i = r + 1, \dots, R$ 。

奇异值分解降噪的出发点是单个频响函数序列： $H_{pq}(\omega) = \{H_{pq}(\omega_1), \dots, H_{pq}(\omega_L)\}$ ，简写为 $H_{pq}(\omega) = H = \{H_1, \dots, H_L\}$ ，构造如下 $m' \times n'$ ($m' > n'$) 维的 Hankel 复矩阵：

$$[A]_{m' \times n'} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_n \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ H_m & H_{m+1} & \cdots & H_L \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

式中： $m' + n' - 1 = L$ ， $A_{ij} = H_{i+j-1}$ 。

也可以利用脉冲响应函数来构造 Hankel 矩阵，脉冲响应函数序列记为 $h_{pq}(t) = h = \{h_1, \dots, h_s\}$ ，其中： $h = FT^{-1}(H)$ ， $s = 2L$ ， $FT^{-1}(\bullet)$ 表示对 \bullet 进行 Fourier 逆变换。

$$[A]_{m \times n} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_s \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

式中： $m + n - 1 = s$ ， $A_{ij} = h_{i+j-1}$ ，此时，Hankel 矩阵为实矩阵。

在文献[42]中，Sanliturk, K.Y. 对使用频响函数 H 与脉冲响应函数 h 两种情况下来构造 Hankel 矩阵的降噪性能进行了比较，得出的结论是：使用脉冲响应函数 h ，可以得到更好的效果。在本文中，就直接利用 $h = FT^{-1}(H) = \{h_1, \dots, h_s\}$ 来构造 $m \times n$ ($m > n$) 维的 Hankel 矩阵：

$$[A] = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_s \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$m \times n$ ($m > n$) 维矩阵 $[A]$ 也可表示成：

$$[A] = [\bar{A}] + [N] \quad (3-5)$$

式中， $[\bar{A}]$ 代表无噪声污染的时序构成的 $m \times n$ ($m > n$) 维矩阵， $[N]$ 代表噪声构成的 $m \times n$ ($m > n$) 维矩阵，这样对脉冲响应函数进行降噪的问题，也就可表示成如何由 $m \times n$ ($m > n$) 维矩阵求 $m \times n$ ($m > n$) 维矩阵 $[\bar{A}]$ 的问题。用矩阵表示就是求取一个滤波器 $[G]$ 使下式成立：

$$[A][G] = [\bar{A}] \quad (3-6)$$

式中, $[G]$ 是 $n \times n$ 维矩阵。滤波器 $[G]$ 的最小范数解由下式给出:

$$[G] = [A]^+ [\bar{A}] \quad (3-7)$$

式中, $[A]^+$ 是矩阵 $[A]$ 的广义逆矩阵, 由下式表示:

$$[A]^+ = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \quad (3-8)$$

假定矩阵 $[A]$ 的奇异值分解为:

$$[A] = [U][\Sigma][V]^T = \begin{bmatrix} U_r & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^H \\ V_0^H \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

式中, Σ_r ($\lambda_i; i=1, \dots, r$) 代表无噪声污染的信号空间, Σ_0 ($\lambda_i; i=r+1, \dots, R$) 代表噪声空间。这样式 (3-8) 中的广义逆矩阵 $[A]^+$ 与 $[A]$ 的奇异值分解有下列关系:

$$[A]^+ = [V][\Sigma]^+ [U]^T \quad (3-10)$$

当无噪声或高信噪比时,

$$[\Sigma]^+ = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, 0, \dots, 0) \quad (3-11)$$

当有噪声或低信噪比时,

$$[\Sigma]^+ = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, \lambda_{r+1}^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) \quad (3-12)$$

当信噪比不太高时, 式 (3-6) 的解是病态的, 不易确定主奇异值和次奇异值, 而且小的次奇异值在 $[\Sigma]^+$ 中变成了很大的对角线元素, 引起滤波器参数较大的扰动。为了减小这种扰动, 可以先求出 $[A]$ 的秩为 r 的最佳逼近矩阵 $[\hat{A}]$ 。在式 (3-7) 中, 由于数据矩阵 $[\bar{A}]$ 也是未知的, 还不能利用式 (3-7) 求出滤波器的参数。实际上, $[A]$ 的秩为 r 的最佳逼近矩阵 $[\hat{A}]$ 可以表示成 $[\hat{A}] = [\bar{A}] + [\Delta N]$, $[\Delta N]$ 是由噪声引起的。当 $\|[\Delta N]\| \rightarrow 0$ 时, $[\hat{A}] \rightarrow [A]$, $[\hat{A}]^+ \rightarrow [A]^+$ 。用 $[\hat{A}]$ 作为 $[A]$ 的一个估计, 求出滤波器参数。用 $[\hat{A}]$ 作为新的参数, 重复前面过程, 当滤波器参数不再发生变化时, 就求出了降低噪声后的数据。

从式 (3-7) 中求取滤波器的过程从奇异值上来说就是将 λ_i ($i > r$) 置为零, 仅利用 $[U]$, $[\Sigma]$, 和 $[V]$ 的前 r 列计算得到无噪声污染的矩阵 $[\bar{A}] = [U_r][\Sigma_r][V_r]^T$ 。注意到 $[\bar{A}]$ 不是

Hankel 矩阵的形式，为了得到无噪声污染的数据，可以通过对 $[\bar{A}]$ 反对角线上的元素进行算术平均得到，即：

$$\bar{h}_i = \frac{1}{k-l+1} \sum_{j=1}^k \bar{A}_{i+j-1} \quad (3-13)$$

式中： $l = \max(1, i - m + 1)$, $k = \min(n, i)$ 。通过将向量 \bar{h} 进行 Fourier 变换得到 \bar{H} ，即 $\bar{H} = FT(\bar{h})$ 。

3.3 叠盖平均处理及经验阈值公式

基于奇异值分解的降噪方法的关键之处是选择矩阵的维数 $m \times n$ 和奇异值矩阵的秩 r 值的选取。通常情况下，选择高维数且接近方阵的 Hankel 矩阵进行处理效果更好，文中选定 $m = n + 1$ 。通常奇异值矩阵的秩 r 值的选取可按照如下方法：画出归一化的奇异值图，观察其突降位置来决定 r 值。

这种做法带来了两个问题：一、选择高维数的矩阵会使计算量增加，处理起来非常耗时；二、每次通过观察奇异值突降的位置来确定奇异值矩阵的秩 r 值使得降噪过程无法自动进行，因为需要操作者的干预，在数据量非常大的时候，这个过程将变得繁冗不堪。下面本文针对这两个问题提出解决办法。

3.3.1 叠盖平均处理

针对选择高维数的矩阵将会使计算量增加的问题，本文提出的解决办法是：将长的数据划分成较短的数据段，并且划分后的数据段之间可以交叠，即利用当前数据段的后面部分数据及下一个数据段的前面部分数据构造 Hankel 矩阵进行降噪处理，如图 3-1 所示。在叠盖处理过程中，重叠率越高，各个数据段之间相关程度越大，降噪后的频响函数曲线越光滑。采用这种办法可以在保证降噪效果的前提下，大大地降低算法的时间复杂度。

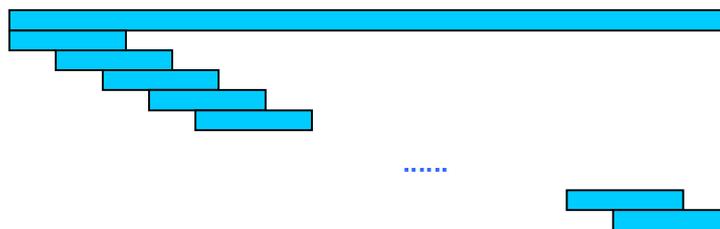


图 3-1 叠盖平均处理

Fig.3-1 Overlap averaging process

3.3.2 经验阈值公式

如前所述，通常奇异值矩阵的秩 r 值可按照如下方法选取：画出归一化的奇异值图，观察其突降位置，由此决定 r 值，如图 3-2 所示。

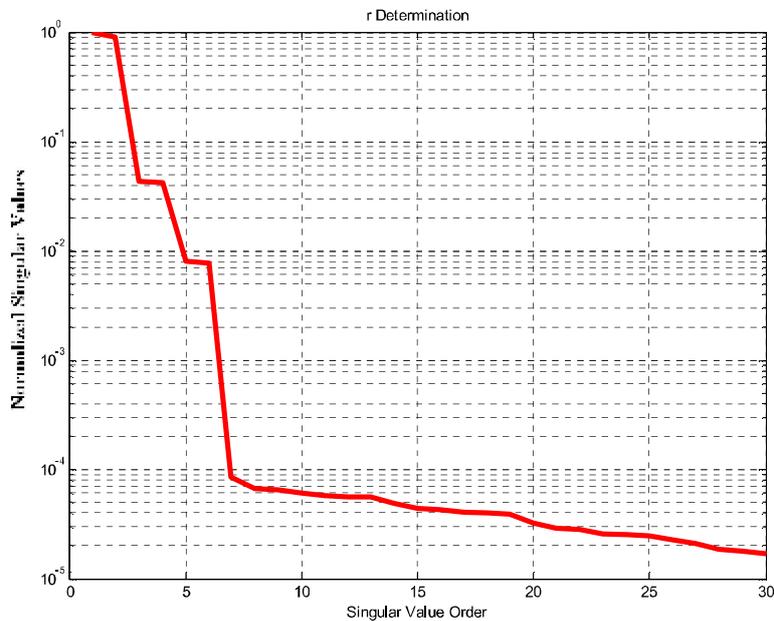


图 3-2 脉冲响应函数矩阵的归一化奇异值图

Fig.3-2 Normalized singular values corresponding to a IRF

采用这种方法的不便之处在于需要操作者的干预，在数据量小的情况下还可行。如果脉冲响应函数序列的数量很大，这个过程将变得繁冗不堪，为了使这个过程自动进行，需要寻求其它的解决办法，一个实用的办法是删除占整个特征值之和 15% 以下的特征值^[43]。即有如下公式：

$$\lambda_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \left(\frac{\sum_{k=i}^n \lambda_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \right) \leq 15\%; \\ \lambda_i, & \text{else.} \end{cases} \quad (3-14)$$

式中， $i = n, n-1, \dots$ 。也就是说，从最小奇异值开始逆向逐次求和，直到不满足式(3-14)的条件，这时确定的 i 值即奇异值矩阵的秩 r 值。这个过程易于编程自动实现，这样就避免了人为的干预。但是如果选定阈值 $thres$ 固定不变，如前面所述取定为 15%，就不能考虑各个数据段的测量质量的好坏。因此阈值 $thres$ 不应该是固定值，而应该是变化的，那么根据什么来确定它的变化情况呢？下面将进行讨论。

我们知道，频响函数非参估计时用的是最小二乘近似方法，而相干函数是最小二乘误差的度量，可以给出频响函数各次平均的一致性程度，反映了测量质量的好坏（噪声大小、泄漏程度……），图 3-3 给出了相干函数的示例。相干函数小于 1，可能是由下列某种或几种原因引起的^[13]：

- ◆ 在激励和/或响应的测量中存在不相关的噪声；
- ◆ 被研究系统有非线性；
- ◆ 分析过程中有泄漏；
- ◆ 系统中的延迟现象未在分析中得到补偿。

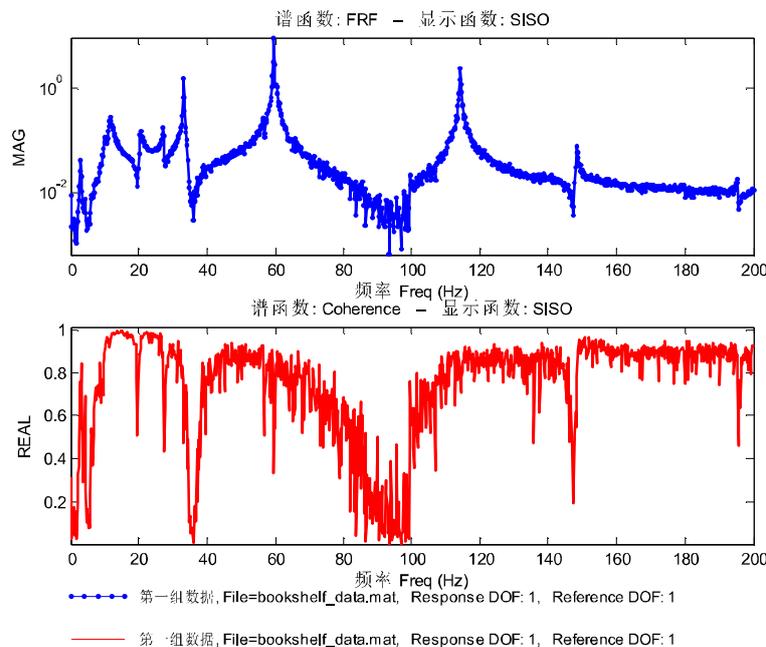


图 3-3 频响函数及相干函数示例
 Fig.3-3 FRF and coherence function

相干函数是测量质量好坏的度量，当前选中频段内的相干函数均值大时，反映了测量的质量好，阈值应该取得小，相应的 r 值大，也就是说舍去的奇异值少，根据这个原则，本文提出如下的经验阈值公式：

$$thres = thres1 + thres0 * (1 - \overline{Coh}^\alpha) * \exp(1 - \overline{Coh}^\beta) \quad (3-15)$$

其中， \overline{Coh} 为数据段内对应的相干函数均值； $thres0$ 为阈值限定系数，由此值限定阈值 $thres < 1$ ； $thres1$ 是当 \overline{Coh} 为 1 时对应的阈值，此值为最小阈值， α 、 β 是两个作为

幂的常系数。此经验公式是以 \overline{Coh} 为自变量的减函数，其中 α 、 β 的取值由经验确定。图 3-4 给出了经验阈值公式曲线图示例。

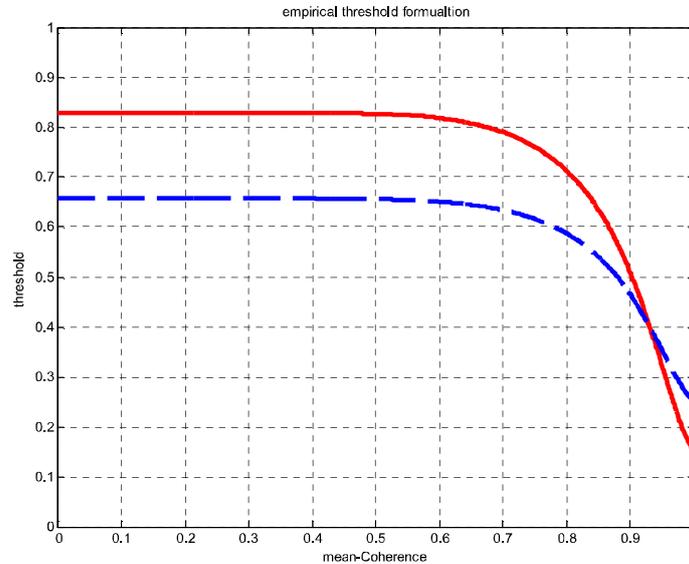


图 3-4 经验阈值公式曲线示例

Fig.3-4 Empirical threshold formulation curve

— $thres1 = 0.15, thres0 = 0.25, \alpha = 8, \beta = 25$

- - - $thres1 = 0.25, thres0 = 0.15, \alpha = 8, \beta = 25$

3.4 数值仿真算例

为了验证该方法的有效性，设计一个数值仿真算例，三自由度振动系统的结构如图 3-5 所示。该系统的质量、刚度以及阻尼矩阵分别为：

$$[mass] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad [stiff] = \begin{bmatrix} 26 & -12 & 0 \\ -12 & 22 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \times 10^4, \quad [damp] = \begin{bmatrix} 13 & -6 & 0 \\ -6 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

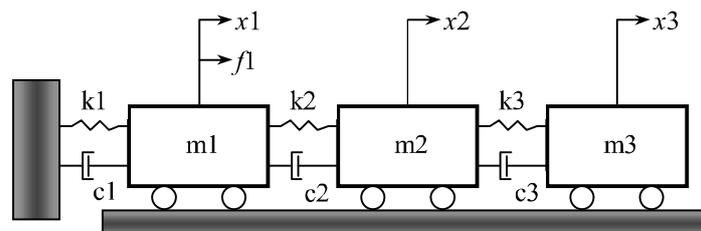


图 3-5 三自由度系统

Fig.3-5 Three degree of freedom system

该系统的固有频率和阻尼比精确值见表 3-1。

表 3-1 频率和阻尼比精确结果

阶数	精确值	
	频率 f [Hz]	阻尼比 ξ [%]
1	7.5982	0.1322
2	21.3976	0.4761
3	32.8024	0.5544

用白噪声对 m1 进行激励，输出信号为 x_1 , x_2 , x_3 ，采样参数设置见表 3-2。

表 3-2 采样参数表

采样频率	100 Hz
采样点数	1024
频率分辨率	0.09765625 Hz
Nyquist 频率	50 Hz

m1 处频响函数的幅频曲线和相频曲线如图 3-6 所示。

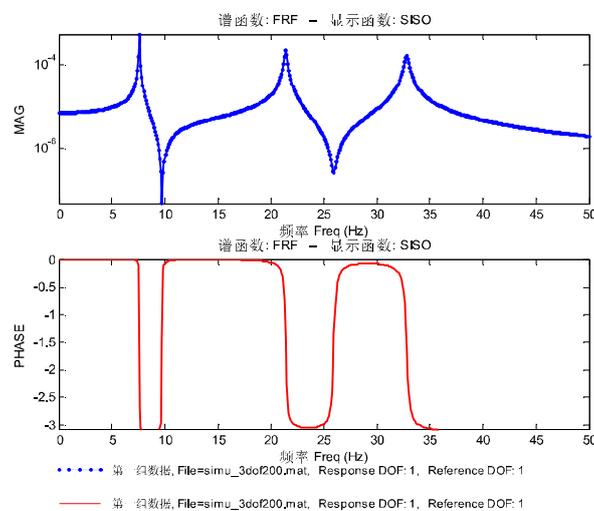


图 3-6 m1 处频响函数，幅频曲线-上图，相频曲线-下图
 Fig.3-6 Exact FRF at m1, magnitude-upper part, phase angle-lower part

考虑 10% 的输出白噪声，10% 是噪声最大幅值与脉冲响应最大幅值之比。图 3-7 是加 10% 白噪声的无滤波的频响函数的幅频曲线和相频曲线。图 3-8 是加 10% 白噪声的滤波后的频响函数的幅频曲线和相频曲线。可以看出滤波效果十分明显。

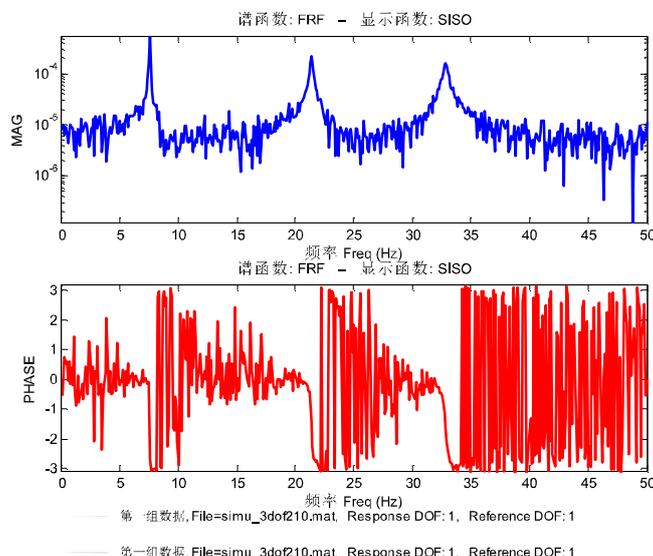


图 3-7 加入 10% 白噪声后 m1 处频响函数, 幅频曲线-上图, 相频曲线-下图
 Fig.3-7 FRF at m1, magnitude-upper part; phase angle-lower part, 10% additive noise

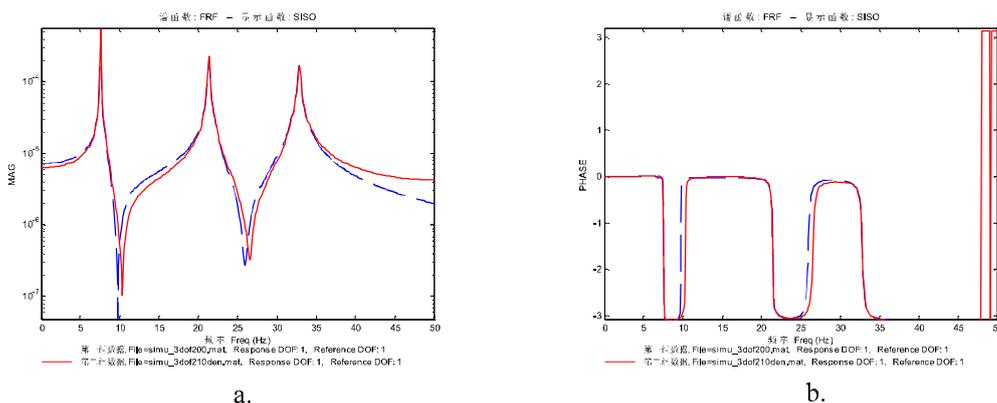


图 3-8 准确的频响函数与滤波后的频响函数比较, a. 幅频曲线, b. 相频曲线
 Fig.3-8 Comparison of exact FRF to filtered one (10% additive noise), a. magnitude b. phase angle

下面把利用 LSCF、RFOP、ERA 三种方法对仿真数据加 10% 白噪声情况下，无滤波和滤波后的识别结果列表，见表 3-3。从表中可以看出，当滤波之后，模态参数识别的精度提高较大，所以该方法应用于工程实践中有很大意义。另外也可以看出，LSCF 的抗噪声干扰能力很强，并且对小阻尼来说，性能同样良好。图 3-9 是 LSCF 识别过程中的稳态图。

表 3-3 三自由度系统参数识别结果比较

Mode Order	LSCF				RFOP				ERA				
	Freq. Hz	Error %	Damp. %	Error %	Freq. Hz	Error %	Damp. %	Error %	Freq. Hz	Error %	Damp. %	Error %	
10 % Noise	1	7.5984	.0026	.13084	-1.0287	7.9483	4.6077	.008873	-32.8797	7.6489	.6673	.128	-3.177
	2	21.3981	.0023	.45384	-4.6755	27.1204	26.7451	.34919	-26.6562	21.4426	.2103	.47501	-.2289
	3	32.8039	.0046	.53682	-3.171	38.6657	17.8746	.24149	-56.4412	32.8739	.218	.56195	1.3618
Filtered	1	7.5981	-.0013	.13476	1.9365	7.5983	.0013	.13569	2.6399	7.6476	.6502	.13391	1.2935
	2	21.398	.0019	.46329	-2.6906	21.399	.0065	.45799	-3.8038	21.4473	.2323	.46113	-3.1443
	3	32.8064	.0122	.56556	2.0148	32.8082	.0177	.56195	1.3618	32.8571	.1668	.55858	.754

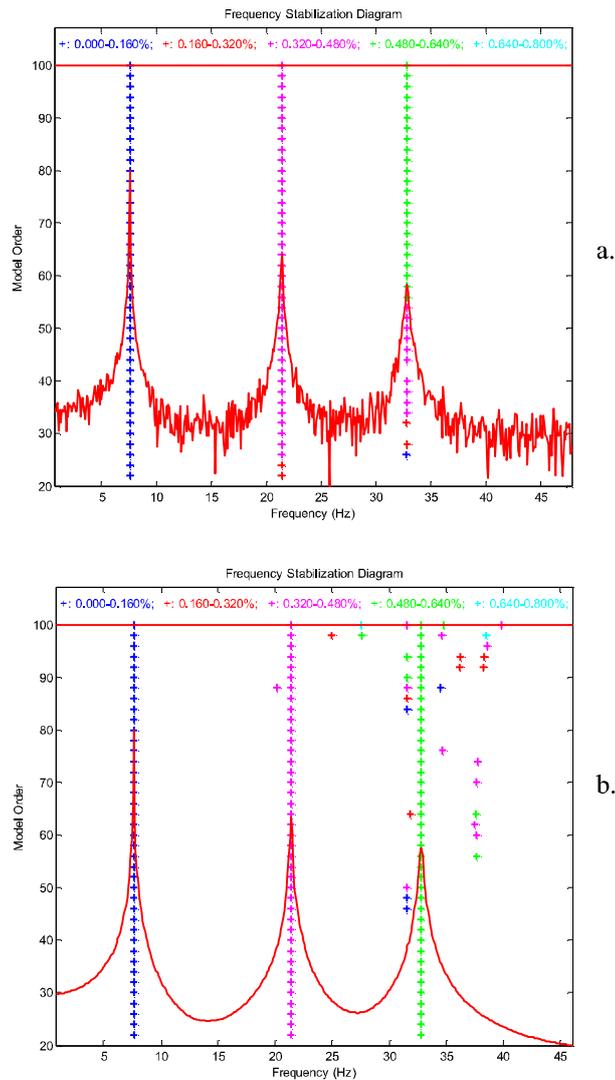


图 3-9 LSCF 法识别过程中的稳态图, a. 10%白噪声 b. 滤波后

Fig.3-9 Stabilization diagram for the LSCF, a. 10% additive noise b. filtered FRF.

第四章 软件实现

4.1 简介

自 1980 年代中后期以来,市场上先后推出了先进实用的商业化模态分析软件包,如比利时 LMS 公司的 LMS Test.Lab 软件包,国内北京东方振动和噪声技术研究所的 **DASP (Data Acquisition & Signal Processing)** 系统中含有模态分析功能。但是这些软件包用于研究目的有两个不便之处:一、无法察看算法是如何实现的;二、不能加入自己开发的功能。为解决以上问题,有必要开发一个具有开放环境的、适用于传统试验方法及工作环境激励下的模态分析软件- **Experimental & Operational Modal Analysis System, E&OMAS**, 这是本论文的重要目标之一。

文献[44]中, Johnson,R.指出了软件编程的一个重要原则: ‘Use existing functions, in that developing a function that is correct, readable and reasonably flexible can be a significant task, it may be quicker or surer to find an existing function that provides some or all of the required functionality.’, 即利用已有的成熟的函数可以加速软件的开发。中国有句成语叫做“他山之石, 可以攻玉”说的也是这个道理。

E&OMAS 是在自由软件 **DIAMOND** 的基础上采用 **MATLAB** 语言开发而成的, 借鉴、移植了其部分功能。**DIAMOND** 是洛斯-阿拉莫斯国家实验室工程科学与应用部 (Engineering Sciences and Applications Division in Los-Alamos National Laboratory) Doebling, S.W., et al.于 1998 年受美国能源部委托开发的项目, **DIAMOND** 是由 **Damage Identification And MOdal aNalysis of Data** 的大写字母组成的名称, 它包含了损伤识别和模态分析等功能模块, 之后 Doebling, S.W., et al.将其全部 Matlab 源代码向公众开放, 任何人只要遵循自由软件协定都可以免费使用并对之进行修改, 关于 **DIAMOND** 的更详尽信息, 感兴趣的读者可参考文献[45], 在此不作赘述。

频响函数之和、模态指示函数、稳态图等对于估计系统中的物理极点都是很重要的工具。模态参数估计的最后一步是确定模态位移, 得到这一信息后, 模态模型便告完成。之后须要对得到的模态模型进行验证。当前计算机技术的迅速发展使人认为: 模态参数估计几乎是一种黑箱式方法, 实际情况并非如此。可以说, 只有将数学工具与经验、直观感觉、工程判断力富有成效地结合起来, 才能根据给定的测量数据得到最佳的模态模型^[13]。因此, 一个好的模态分析软件必须提供尽可能多的数学工具, 以辅助操作者在模态参数识别过程中作出有效的判断, 另外必须提供良好的图形用户接口界面。在这种思想的指导下, **E&OMAS** 的主要功能有: 文件管理、结构及自由度编辑、预处理 (SVD 降噪、传函估计)、波谱显示、参数识别、模态模型验证、模态归一、振型动画等。软件采用 Windows 风格的图形用户接口界面。

本章将简要介绍 **E&OMAS** 的功能模块以及软件实现过程中数值计算的几个问题，最后给出几个软件界面示例。

4.2 E&OMAS 功能模块介绍

4.2.1 整体流程图

下面给出软件的整体流程图，见图 4-1。

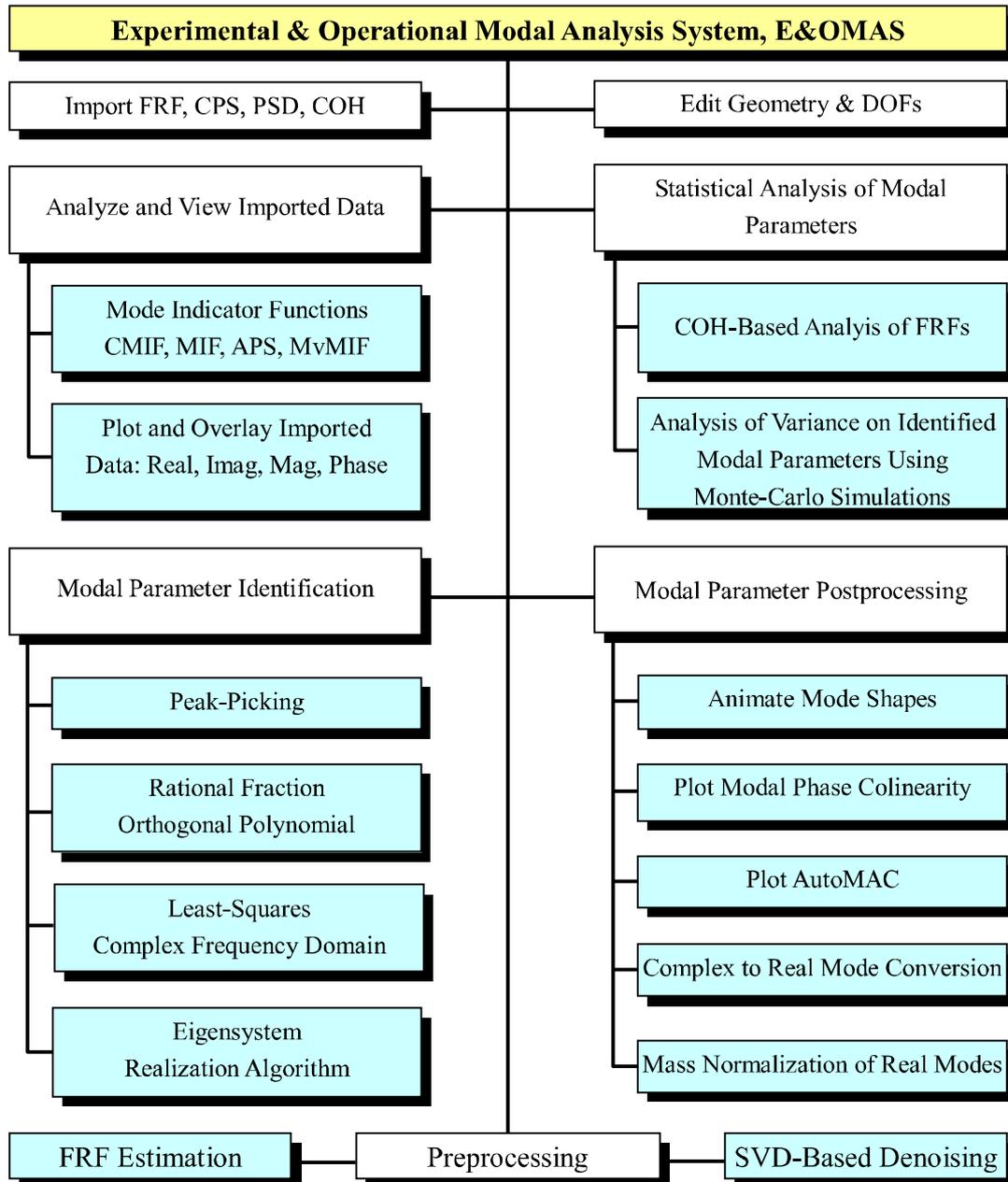


图 4-1 E&OMAS 整体流程图

Fig.4-1 Global flowchart for the E&OMAS

E&OMAS 由七个功能模块构成，分别是文件管理、信号预处理、几何结构及自由度编辑、波谱显示、模态参数识别、模态模型验证、振型动画等功能。

4.2.2 预处理

在预处理功能模块中，实现对输入-输出信号进行传函估计，或者对于环境激励下的输出响应信号和参考点响应信号进行互谱估计。另一个重要功能就是对传递函数或互谱进行降噪处理。

4.2.3 文件管理

结构试验中会产生大量的数据，尤其是大型结构的多通道模态试验，数据量相当大。要进行快速的处理和分析，就要对文件管理进行优化设计。E&OMAS 提供了文件的导入/导出功能：导入/导出 UFF 格式数据；导入靴带法仿真用的多组测量数据；导出文本格式模态数据；提供打印当前图形或复制其到剪贴板的功能，以及加载/保存数据、模态结果和几何结构等信息。

4.2.4 编辑几何结构及自由度

提供了快速灵活的方法来建立结构的三维线架模型，此线架模型主要用来进行模态振型动画显示。几何结构由结点和连线组成，采用表格编辑输入方式，可即时进行显示更新。自由度编辑也采用了表格编辑输入方式，并且具有自动生成功能。

4.2.5 波谱显示

可对数据的时域波形、频谱、模态指示函数等进行显示，提供了将不同组数据重叠显示，上/下双图显示，对数/线性坐标显示，可对线型及颜色进行设置等丰富功能。

4.2.6 模态参数识别

参数识别功能是本软件设计的重点，频域法有：峰值拾取法、有理分式正交多项式法和最小二乘复频域法；时域法有特征系统实现算法。既可用于传统的模态参数识别也可用于环境激励下的模态参数识别。可对模态矢量进行质量归一或者驱动点振型归一。

4.2.7 模态模型验证

提供了一组完善的验证工具，既可以在模态参数估计过程中将物理模态与计算模态区别开来，也可对估计出来的模态参数质量和可靠性予以评估。一、平均功率谱，把识别过程中用到的全部频响函数或互功率谱进行求平均，可以更明显地指示存在的共振频率；二、模态指示函数 (Mode Indication Function, MIF)，指出存在的共振频率；三、稳态图，是一种独特的、强有力的工具，可以帮助鉴别出物理模态与计算模态，

识别紧密耦合模态甚至重根模态。并且可把各种函数（MIF、平均功率谱等）重叠显示在稳态图上，其中的最小二乘复频域法和特征系统实现算法中提供了稳态图功能，简化了操作者确定模型阶数的困难。为了在二维平面空间显示更多的信息，最小二乘复频域法的稳态图中用彩色区分了阻尼比的范围；四、模态置信准则（Modal Assurance Criterion, MAC），是两个模态振型之间的几何相关性的指示函数，用以评估识别的质量；五、模态相位共线性（Modal Phase Colinearity, MPC），表示模态“实”的成分有多大，在检查局部阻尼或错误估计时很有用。

4.2.8 模态振型动画显示

提供了三维振型动画显示功能，可以对其动画速度、幅度进行调整，并且振型可按照复模态或实模态进行显示。

4.3 软件实现过程中数值计算的几个问题

4.3.1 恰定方程组的解

对于含 n 个未知数的 n 个方程构成的方程组 $Ax = b$ ，在线性代数教科书中，最常介绍的解法有：*Cramer* 法；逆矩阵法，即 $x = A^{-1}b$ ；*Gaussian* 消元法；*LU* 法。一般来说，对于维数不高、条件数不大的矩阵，以上四种解法所得结果不会有明显差别。但更确切地说，前三种解法的更多意义在理论上，而不在实际的数值计算上。在 *MATLAB* 中，方程采用 *LU* 求解，并且出于算法稳定性的考虑，行列式及逆的计算也都在 *LU* 分解的基础上进行。因此，求解方程时，要利用矩阵除法指令 $A \setminus b$ ，其中 \setminus 为 *Backslash* 矩阵除或左矩阵除，尽量不要使用指令 $inv(A)*b$ 进行，因为它不仅速度没有除法快，而且计算精度也没有除法高。

4.3.2 超定方程组的最小二乘解

对于线性模型， $b = Ax + \eta$ ，式中 η 为服从正态分布 $N(0,1)$ 的白噪声，求该超定方程最小二乘解有三种常见途径：一、正则方程法得解 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ ；二、广义逆法得解 $x = A^+ b$ ；三、用矩阵除法得解 $x = A \setminus b$ 。应该指出，第一种解法出现在许多教科书中，这种表达式比较容易理解，但数值精度差，该法带有较大的示例性。第二种解法建立在奇异值分解的基础上，所得解可靠，即使 A 发生列秩亏损，它也能给出最小二乘解。第三种解法建立在对原超定方程直接进行 *Housholder* 变换的基础上。其可靠性稍逊于奇异值分解，但速度较快。在 A 发生列秩亏损时，它所给出的最小二乘解具有最少非零元素。在软件中使用了第三种解法。

4.3.3 振型求解的矩阵方程形式

通常书中给出的留数-极点模态模型的方程式都是以有理分式形式给出的。当极点已知时，此方程组转化为线性方程组，为了求解其它的未知参数需要将其写成矩阵的形式。下面以多参考点最小二乘复频域法为例，将其有理分式形式的留数-极点模态模型式(2-44)写为下式：

$$[H(\omega)]_{N_o \times N_i} = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{\{\psi_r\} \langle L_r^T \rangle}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\psi_r^*\} \langle L_r^H \rangle}{(i\omega - \lambda_r^*)} \right) + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2} \quad (4-1)$$

式中符号的含义同式(2-44)，将它写成矩阵的形式为：

$$[H(\omega)] = [\psi_1 \quad \cdots \quad \psi_{N_m} \quad \psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_{N_m}^* \quad LR \quad UR] \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{i\omega - \lambda_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{i\omega - \lambda_{N_m}} \quad \frac{1}{i\omega - \lambda_1^*} \quad \cdots \quad \frac{1}{i\omega - \lambda_{N_m}^*} \quad \underbrace{\frac{-1}{\omega^2} \quad \cdots \quad \frac{-1}{\omega^2}}_{N_i \text{ 个}} \quad \underbrace{1 \quad \cdots \quad 1}_{N_i \text{ 个}} \right) \cdot \begin{bmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_{N_m}^T \\ L_1^H \\ \vdots \\ L_{N_m}^H \\ I \\ I \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

式中， I 为 $N_i \times N_i$ 的单位阵， $[\psi_1 \quad \cdots \quad \psi_{N_m} \quad \psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_{N_m}^* \quad LR \quad UR]$ 为待求未知参数。

4.3.4 扩阶处理补偿频带外模态影响

传递函数表达式中包含着结构的所有 N 个自由度（为完备模态集），但在进行模态参数识别时只能截取某一频段内的若干自由度进行模态参数识别，即 $N_m < N$ 。然而被截掉的高频段或低频段内的模态对所截取频段内的频率响应有一定影响，因此必须对截取的 N_m 自由度频响函数表达式进行修正，以弥补频域截断所带来的误差。常用的方法就是将低频截断误差和高频截断误差分别看作质量特性、刚度特性的影响所致，如图 4-2 所示，这样就有式(4-1)的表达式。在比某阶模态频率低得多的频率上，该阶模态对频响函数的影响近似于一个实常数值，用 $[UR]$ 来表示。在大大高于某一阶模态频率的范围内，该阶模态对频响函数的影响近似于一个实常数除以 $-\omega^2$ ，用 $-[LR]/\omega^2$ 表示，但只有单自由度的影响可以表示成式(4-1)，这种方法缺乏严格的数学分析基础。

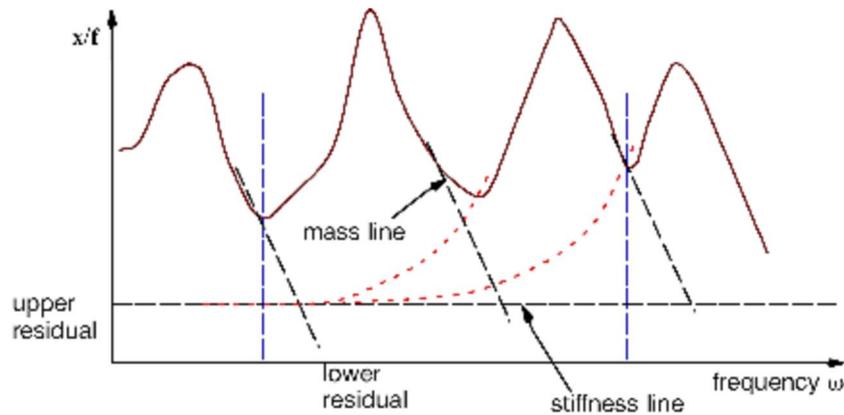


图 4-2 上下剩余项
 Fig.4-2 Upper and lower residuals

假如将被截模态在截取频段内的响应展开成级数，可以看出级数是绝对一致收敛的。连续线性系统的传递函数矩阵在任意环域 $\omega_1 \leq \|s\| \leq \omega_{N_f}$ 上的表达式为：

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{[R_r]}{s - \lambda_r} + \frac{[R_r^*]}{s - \lambda_r^*} \right) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n s^n \quad (4-3)$$

一般情况下，可近似取^[46]：

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{[R_r]}{s - \lambda_r} + \frac{[R_r^*]}{s - \lambda_r^*} \right) + \frac{[T_R]}{s^2} + [E_0 + E_1 s + E_2 s^2] \quad (4-4)$$

式（4-4）中剩余项的阶数取得比式（4-1）高，可以更好地补偿频带外模态的影响。

4.3.5 对频率轴进行归一化处理

可以看到，式（4-2）所采取模型为连续时间频域模型，为了提高正则方程组的数值稳定性，必须对频率轴进行归一化处理^[37]，程序中取频带内的频率中值作为归一化因子。

4.3.6 采用模糊 C-均值聚类算法求取物理极点

为了在选中的稳定极点中将物理极点从计算极点中分离出来，采用了模糊 C-均值聚类算法（Fuzzy C-Means Clustering, FCM），此算法已经集成在 Matlab 的模糊逻辑工具箱中^[47]。算法流程如下：

1. 初始化过程

随机选取聚类中心 c_j^k （ j 表示数据项， k 表示聚类类别数），计算目标 x_{ij} 到中心 c_j^k 的距离 d_{ik} ：

$$d_{ik}^2 = \sum_{j=1}^J (x_{ij} - c_j^k)^2 \quad (4-5)$$

对每个目标 x_i 计算相对于聚类类别 k 的隶属函数值 μ_{ik} :

$$\mu_{ik}^2 = \sum_{k=1}^K \left(\frac{d_{ik}}{d_{il}} \right)^{2/(m-1)} \quad (4-6)$$

式中, m 为加权指数, 通常取 $m = 2$ 。

2. 迭代过程

FOR $n = 1, \dots, N_{iter}$,

a. 对聚类类别 k 更新聚类中心 c_j^k :

$$c_j^k = \frac{\sum_{i=1}^I (\mu_{ik})^m x_{ij}}{\sum_{i=1}^I (\mu_{ik})^m} \quad (4-7)$$

b. 利用新的聚类中心 c_j^k 更新式 (4-5) 的距离 d_{ik}

c. 利用新的距离 d_{ik} 更新式 (4-6) 中的隶属函数值 μ_{ik}

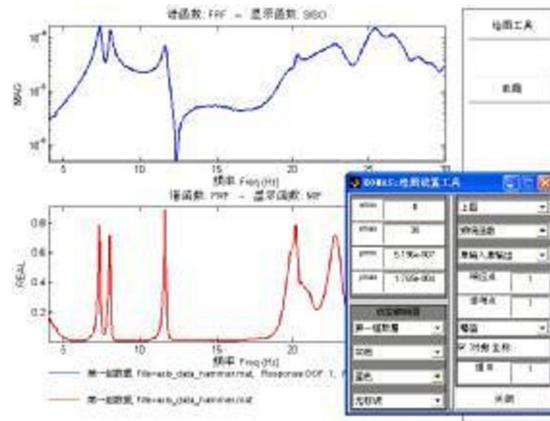
d. 计算目标函数 δ :

$$\delta = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K (\mu_{ik})^m d_{ik}^2 \quad (4-8)$$

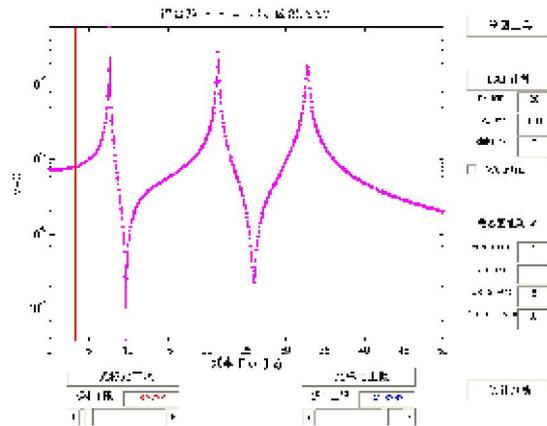
END

程序给出物理极点聚类 and 计算极点聚类 (即 $K = 2$) 的隶属函数值 μ_{ik} , 如果目标对于某个聚类的隶属函数值大于 50%, 则其属于这个聚类。

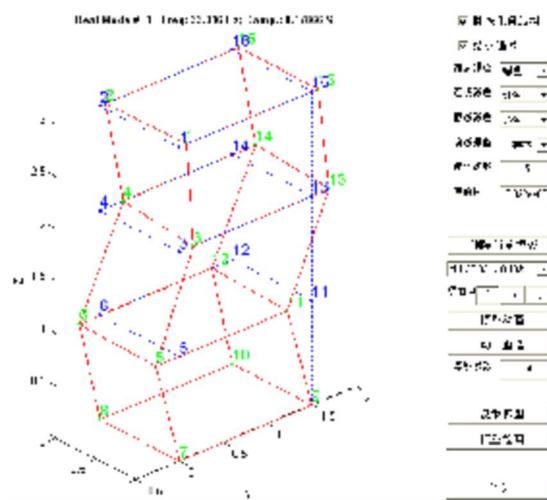
4.3 软件界面示例



a.



b.



c.

图 4-3 软件界面示例 a. 波谱显示 b. 确定频带 c. 振型动画.

Fig.4-3 GUI examples, a.time history & spectral plot, b. deterring freq. band, c.mode shape animation

第五章 应用实例

5.1 简介

在第二章和第三章分别对最小二乘复频域法以及基于奇异值分解的降噪理论进行了较为深入的研究，并且在第三章后面部分利用数值仿真算例对识别算法和降噪理论进行了验证，仿真结果与理论吻合。但这些方法在实际工程中是否有效，还必须进行实验检验。

本章将圆板和三层框架结构模型作为实验对象进行模态参数识别。其中对圆板采用力锤激励方式，三层框架结构模型采用电动力式激振器随机激励方式。将采集的输入输出数据转化为 E&OMAS 的数据格式，用 E&OMAS 进行模态参数识别。并且将 LSCF 的识别结果与 RFOP、ERA 法得到的结果进行对比。

5.2 圆板

5.2.1 实验装置

实验对象为圆板，圆板的外径为 $\Phi 250mm$ ，圆心位置有一固定用的 $\Phi 10mm$ 的内孔，其厚度为 $2mm$ ，材料为 A3 钢。实验仪器设备及其连接设置见图 5-1。将圆板用螺栓固定在立柱上。

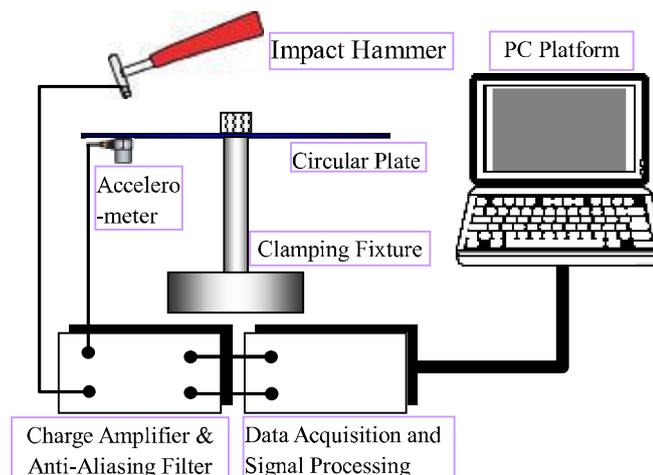


图 5-1 圆盘模态实验装置

Fig.5-1 Experimental set-up for the modal test of the circular plate

本次实验的信号采集部分主要采用了北京东方振动和噪声技术研究所研制的 INV306 便携式智能信号采集处理分析系统，具体实验仪器设备见表 5-1。

表 5-1 圆板模态实验所用仪器设备一览表

序号	设备、仪器名称	型号	数量
1	16 通道智能信号采集处理分析仪	INV306DF-5120	1 台
2	2 通道四合一抗混滤波放大器	DLF-3	1 台
3	笔记本电脑	联想天逸 Y300	1 台
4	智能数据采集与信号处理分析平台软件	DASP2005 (专业版)	1 套
5	弹性力锤 (含力传感器)	MSC-1	1 套
6	压电型加速度传感器	YJ9A	1 只
7	紧固装置	ZJY-601 振教仪配件	1 套

硬件仪器设备连接如图 5-1 所示, 力传感器接 DLF-3 放大器第一通道的电荷输入端; YJ9A 加速度传感器接 DLF-3 第二通道的电荷输入端; DLF-3 的两通道输出分别接 INV306DF-5120 型采集仪的第一、二通道; 采集仪通过并口与笔记本电脑相连。

5.2.2 数据采集

将圆板从圆心起按径向 5 等分而周向 12 等分划分测点, 如图 5-2 所示。其中采用 4 点作为参考点, 加速度传感器采用磁座安装吸附在 4 点的下方。

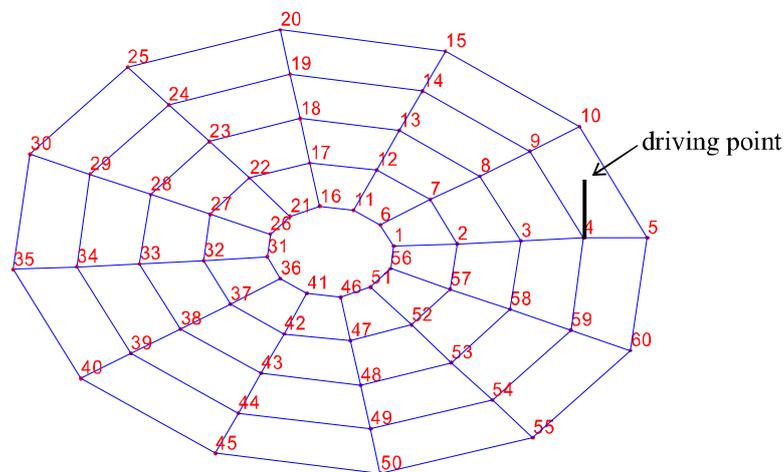


图 5-2 加速度, 力锤激励位置
 Fig.5-2 Accelerometer, impactor locations

采样参数设置见表 5-2。

表 5-2 采样参数设置表

采样频率	10240Hz
采样点数	32768
频率分辨率	0.3125Hz

DLF-3 型抗混滤波放大器档位及标定值设置见表 5-3。

表 5-3 DLF-3 放大器档位及标定值设置表

通道	传感器	灵敏度	DLF-3 型放大器			INV306 系统	
			增益倍数	灵敏度适调	截止频率	标定值 mV/EU	工程单位
1	力传感器	4.5PC/N	1000mV/N	40.0PC/N	2KHz	112.5	N
2	加速度传感器	4.84PC/m/s ²	100mV/m/s ²	12.1PC/m/s ²	2KHz	40	m/s ²

用力锤在各测点沿 Z 方向逐点激励，由 4 点处加速度传感器沿 Z 方向拾振。为提高测量精度，在每个激励点敲击 5 次，将这 5 次数据进行线性平均以便提高信噪比。图 5-3 是参考点 4 的幅频曲线和对应的相干函数曲线。可以看到，由于力锤激励信号的能量有限，不能激起高频模态，故高频部分的信噪比较差，相干函数值低。而通常加速度传感器的低频特性差，为此我们选择 60Hz-800Hz 的频段进行模态分析。

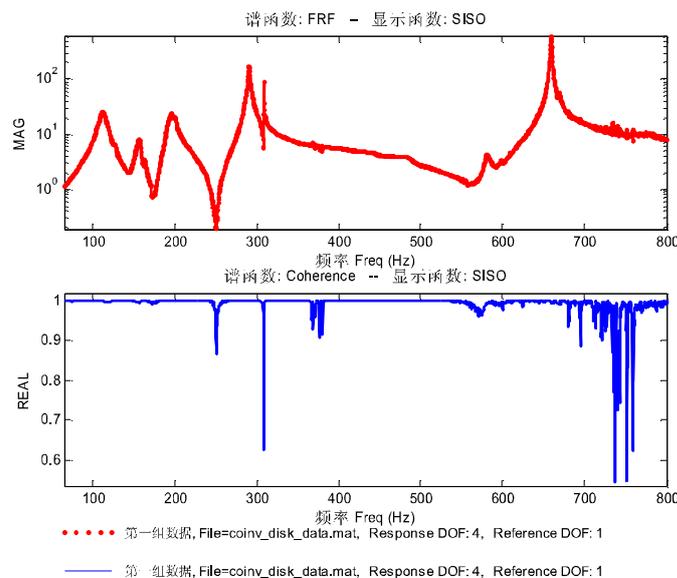


图 5-3 频响函数及相干函数, 幅频曲线-上图, 相干函数-下图

Fig.5-3 FRF and coherence function, magnitude-upper part, coherence function-lower part

5.2.3 模态参数识别

LSCF、RFOP、ERA 的识别结果见表 5-4。由表中可见，其识别的结果的一致性较好。其中第 3、4 阶以及第 6、7 阶的模态耦合较为密集。

表 5-4 圆板模态参数识别比较

Mode Order	LSCF			RFOP			ERA		
	Freq. Hz	Damp. %	MPC	Freq. Hz	Damp. %	MPC	Freq. Hz	Damp. %	MPC
1	111.72	3.33	0.90	111.74	3.25	0.88	112.03	3.68	0.83
2	128.09	1.57	0.87	127.97	1.03	0.92	-	-	-
3	195.29	1.92	0.98	195.89	1.71	0.99	195.78	1.48	0.99
4	290.39	0.46	0.98	290.46	0.40	0.99	290.59	0.40	0.99
5	308.64	0.04	0.99	308.63	0.04	0.96	308.55	0.03	0.95
6	659.52	0.11	0.97	659.52	0.10	0.99	659.52	0.10	0.98
7	668.22	0.15	0.94	668.10	0.13	0.95	668.14	0.16	0.93

图 5-4 为 LSCF 识别过程中的稳态图，可以看到稳态图比较清晰。图 5-5 为 LSCF 识别结果的 AutoMAC 三维阵显示。图 5-6 为测点 4 处的频响应函数综合与测量频响应函数比较。图 5-7 为 LSCF 法识别的圆板模态振型。

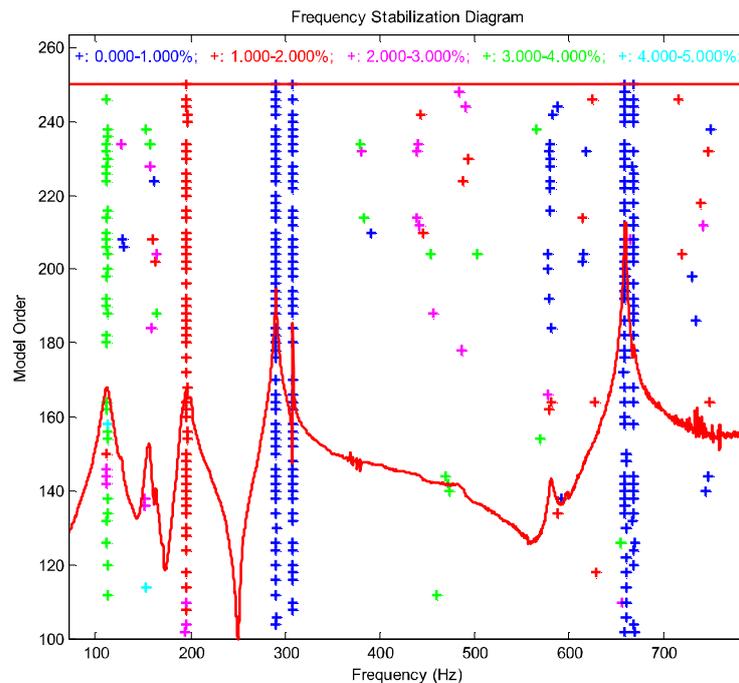


图 5-4 LSCF 识别过程中的稳态图

Fig.5-4 Stabilization plot for the LSCF

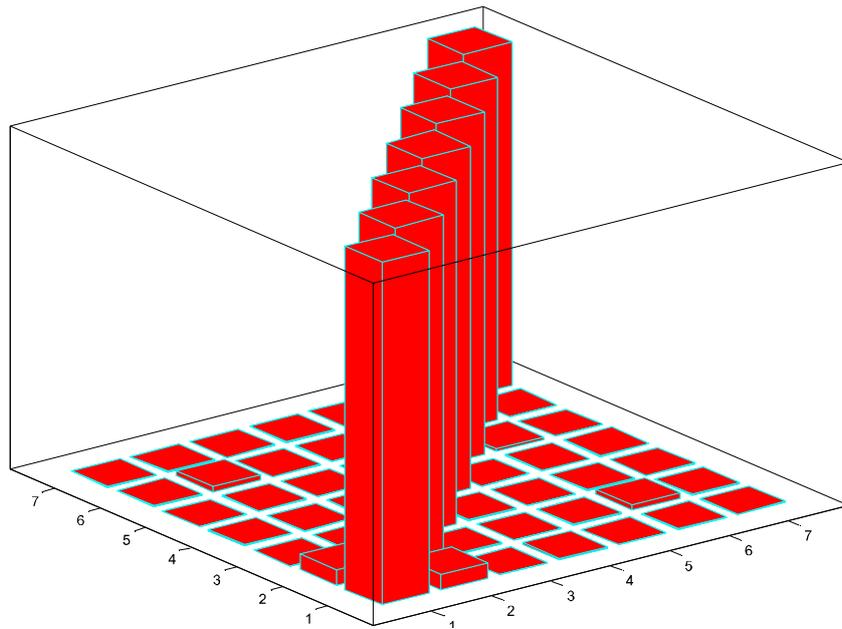


图 5-5 LSCF 识别结果的 AutoMAC 显示

Fig.5-5: Presentation of AutoMAC for the LSCF

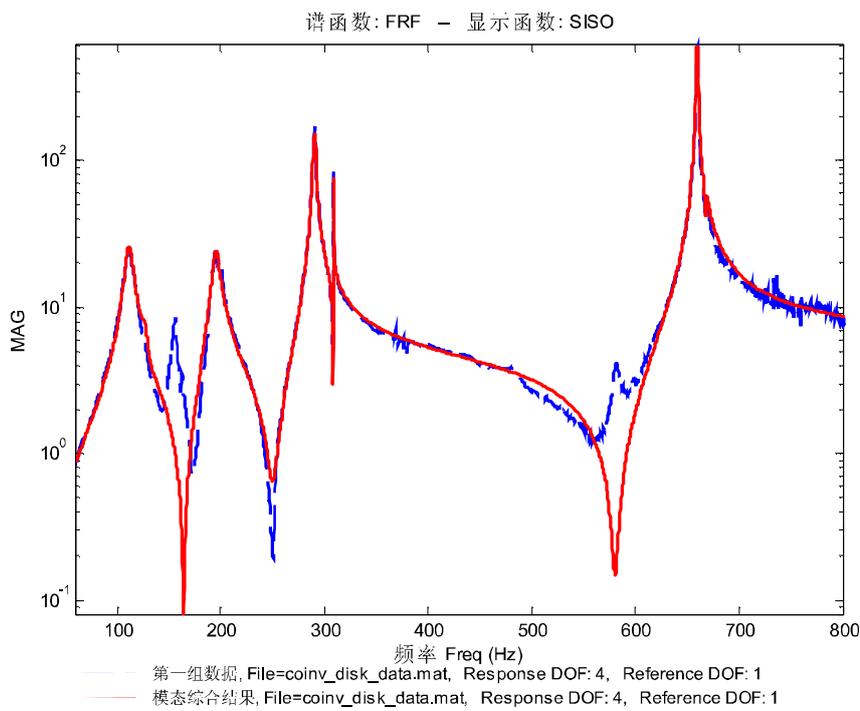


图 5-6 测点 4 处的频响应函数综合 (LSCF) 与测量频响应函数比较

Fig.5-6 Comparison of measured FRF to synthesized FRF (LSCF) at DOF4

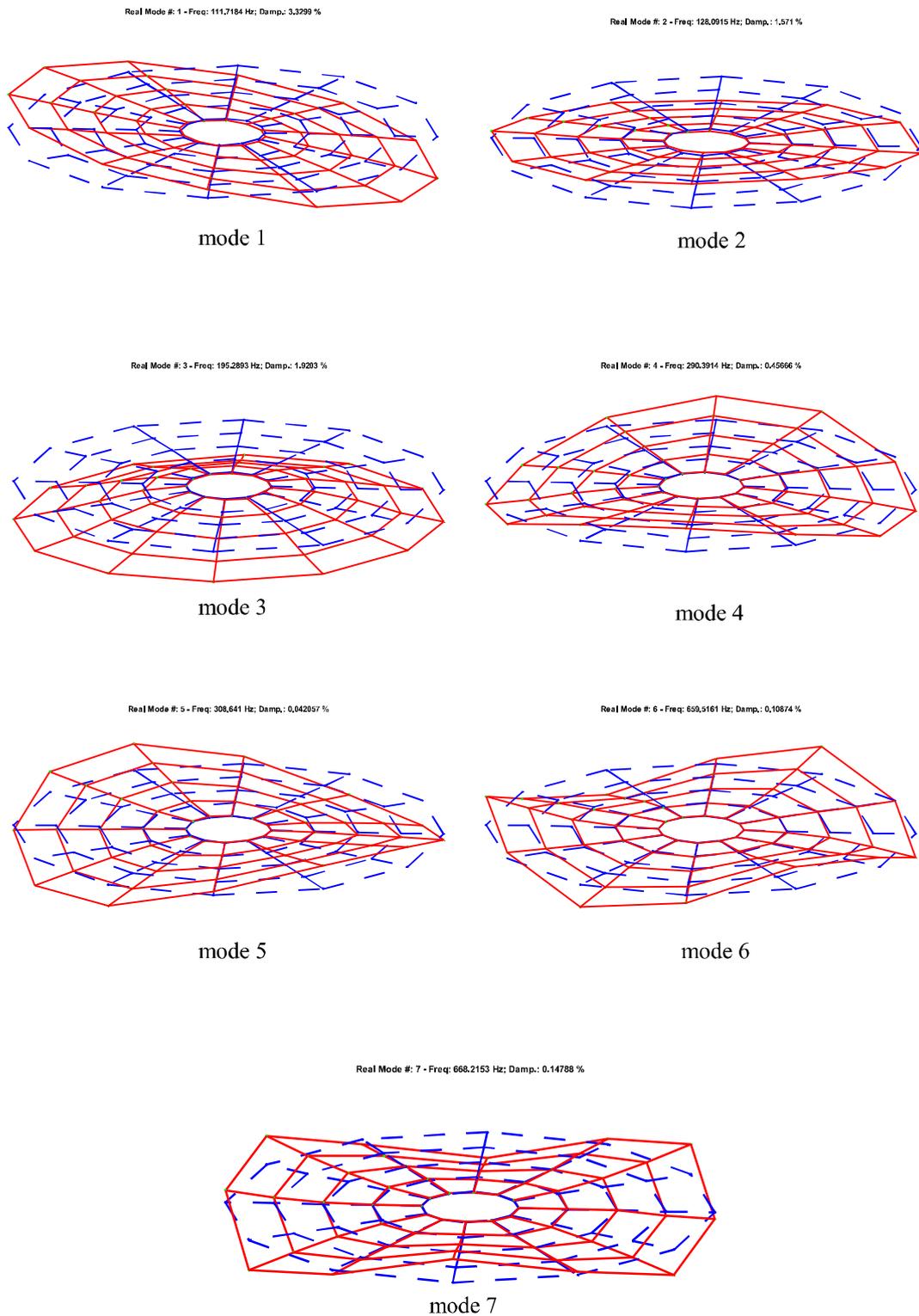


图 5-7 LSCF 法识别的圆板模态振型
Fig.5-7 Mode shapes of the circular plate for the LSCF

5.3 三层框架结构模型

5.3.1 实验装置及数据采集

这个三层框架结构模型的测试数据是 Los Alamos 国家实验室公开的数据，来源于其官方网站^[45]，三层框架结构模型如图 5-8 所示，它由实心立柱和铝质平板通过螺栓连接而成，螺栓连接的细部见图 5-9、5-10。通过螺栓将四个空气隔离器安装在底板上，使框架结构能够在水平方向自由运动。结构尺寸见图 5-11、5-12。



图 5-8 被测结构全图
Fig.5-8 Photo of the full test structure

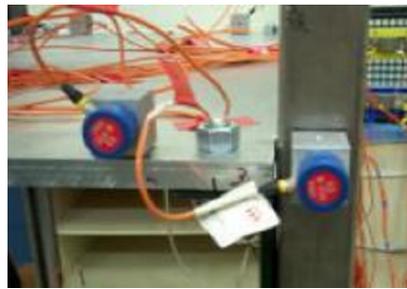


图 5-9 螺栓处的传感器安装位置
Fig.5-9 Photo of a joint on the structure showing sensor placement



图 5-10 力传感器测量激振器的输入激振力
Fig.5-10 Force transducer that measures the input from the shaker to the base of the structure

激振器通过一长 15cm，直径 9.5mm 的细长推力杆对结构施加随机激振力，激振位置为底板中间高度，激振器安装在 D 角位置，如图 5-12 所示，这样能激起弯曲方向以及扭转方向的模态。

在结构上共安装有 24 个压电型加速度传感器，每个螺栓处有两个加速度传感器，如图 5-9 所示。传感器通过热腊粘接在结构上。在本次模态参数识别中，只取立柱上的 12 个传感器的响应数据进行计算，10 次测量求平均以减小随机误差，并且分析频率不高于 200Hz。

采样参数设置见表 5-5。

表 5-5 采样参数设置表

采样频率	1600Hz
采样点数	8192
频率分辨率	0.1953125Hz

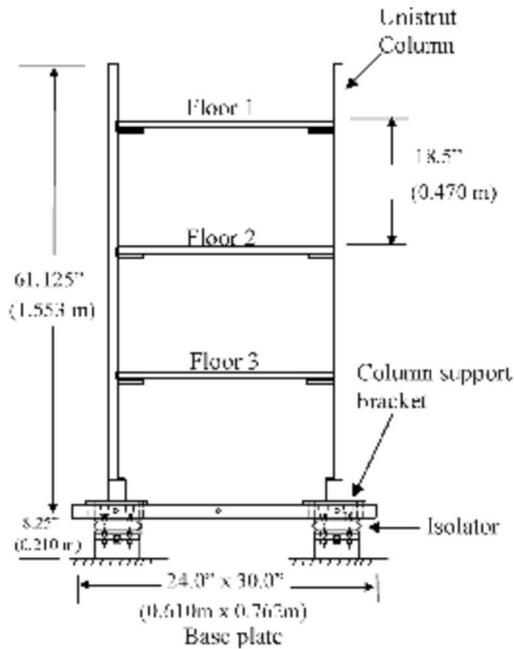


图 5-11 三层框架结构的基本尺寸
 Fig.5-11 Basic dimensions of the 3 story frame structure

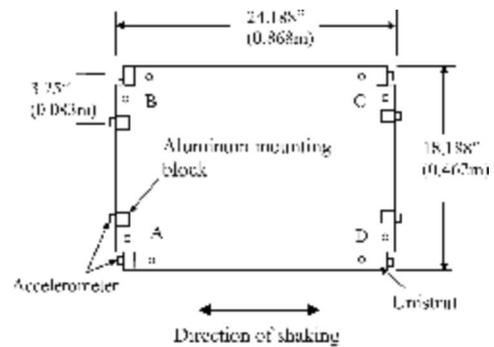


图 5-12 平板布置的俯视图
 Fig.5-12 Floor layout as viewed from above

5.3.2 模态参数识别

LSCF、RFOP、ERA 的识别结果见表 5-6。由表中可见，其识别的结果的一致性较好。

表 5-6 三层框架结构模型的模态参数识别比较

Mode Order	LSCF			RFOP			ERA		
	Freq. Hz	Damp. %	MPC	Freq. Hz	Damp. %	MPC	Freq. Hz	Damp. %	MPC
1	2.90	3.64	0.997	2.91	1.31	0.973	3.0	1.31	0.996
2	10.16	3.62	0.910	10.20	3.61	0.965	10.38	4.03	0.966
3	11.64	3.55	0.950	11.66	3.79	0.988	11.73	3.91	0.993
4	20.42	1.37	0.995	20.41	1.30	0.999	20.52	1.37	0.999
5	27.29	0.78	0.982	27.56	0.52	0.962	27.33	0.30	0.999
6	33.04	0.21	1.000	33.03	0.21	1.000	33.14	0.15	1.000
7	59.67	0.13	0.788	59.65	0.11	0.975	59.66	0.10	0.953
8	114.23	0.12	1.000	114.23	0.12	1.000	114.33	0.12	1.000
9	148.47	0.13	1.000	147.91	0.14	0.990	148.50	0.16	0.990

图 5-13 为 LSCF 识别过程中的稳态图，可以看到稳态图比较清晰。图 5-14 为 LSCF 识别结果的 AutoMAC 三维阵显示。图 5-15 为测点 4 处的频响函数综合与测量频响函数比较。图 5-16 为 LSCF 法识别的三层框架结构的模态振型。

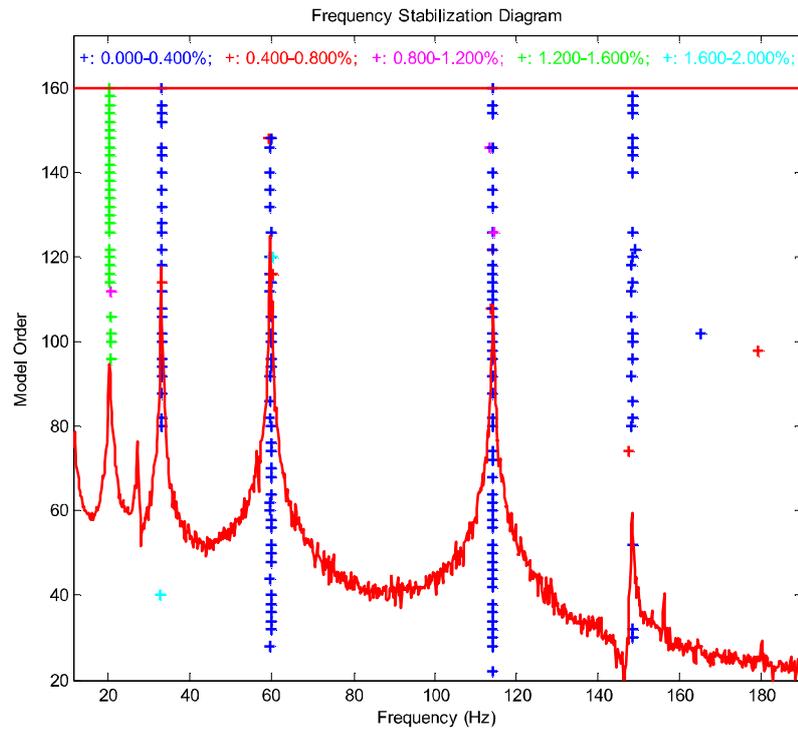


图 5-13 LSCF 识别过程中的稳态图
 Fig.5-13: Stabilization chart for the LSCF

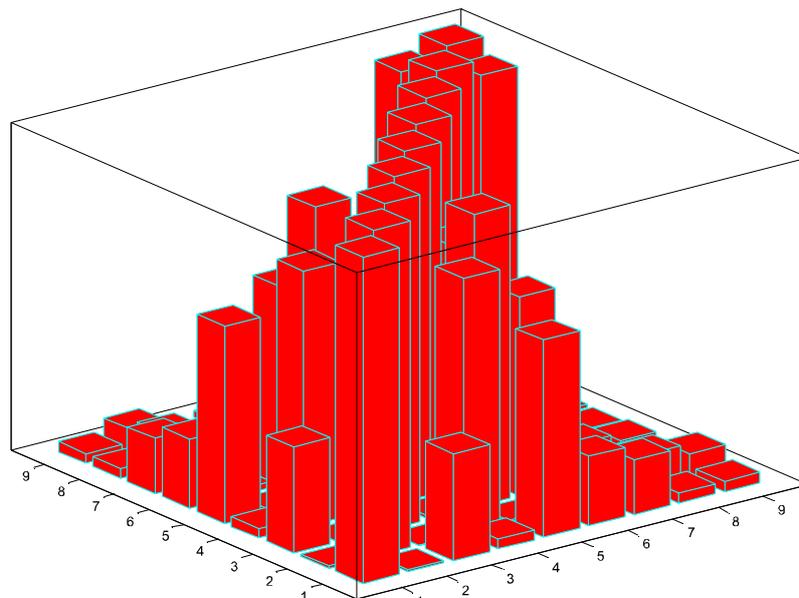


图 5-14 LSCF 识别结果的 AutoMAC 显示
 Fig.5-14: Presentation of AutoMAC for the LSCF

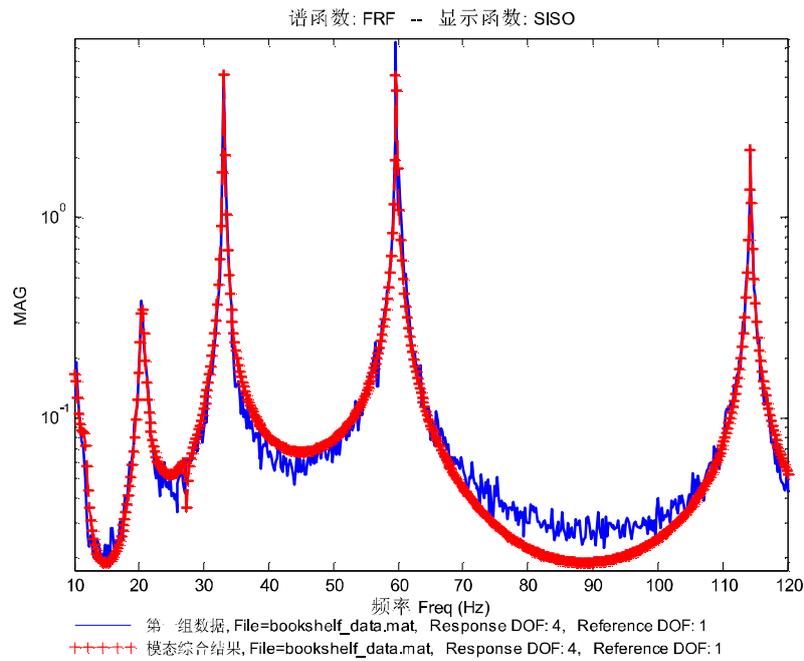
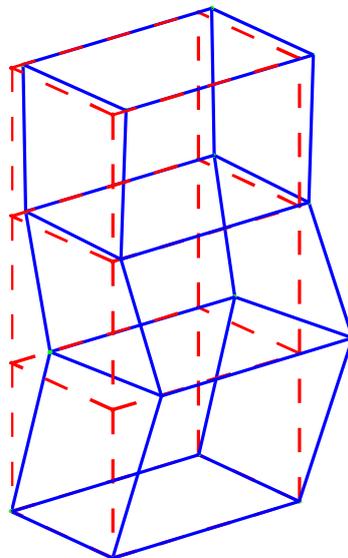


图 5-15 测点 4 处的频响函数综合 (LSCF) 与测量频响函数比较

Fig.5-15 Comparison of the measured FRF to the synthesized FRF (LSCF) at DOF4

Real Mode #: 1 - Freq: 2.9045 Hz; Damp.: 3.6377 %



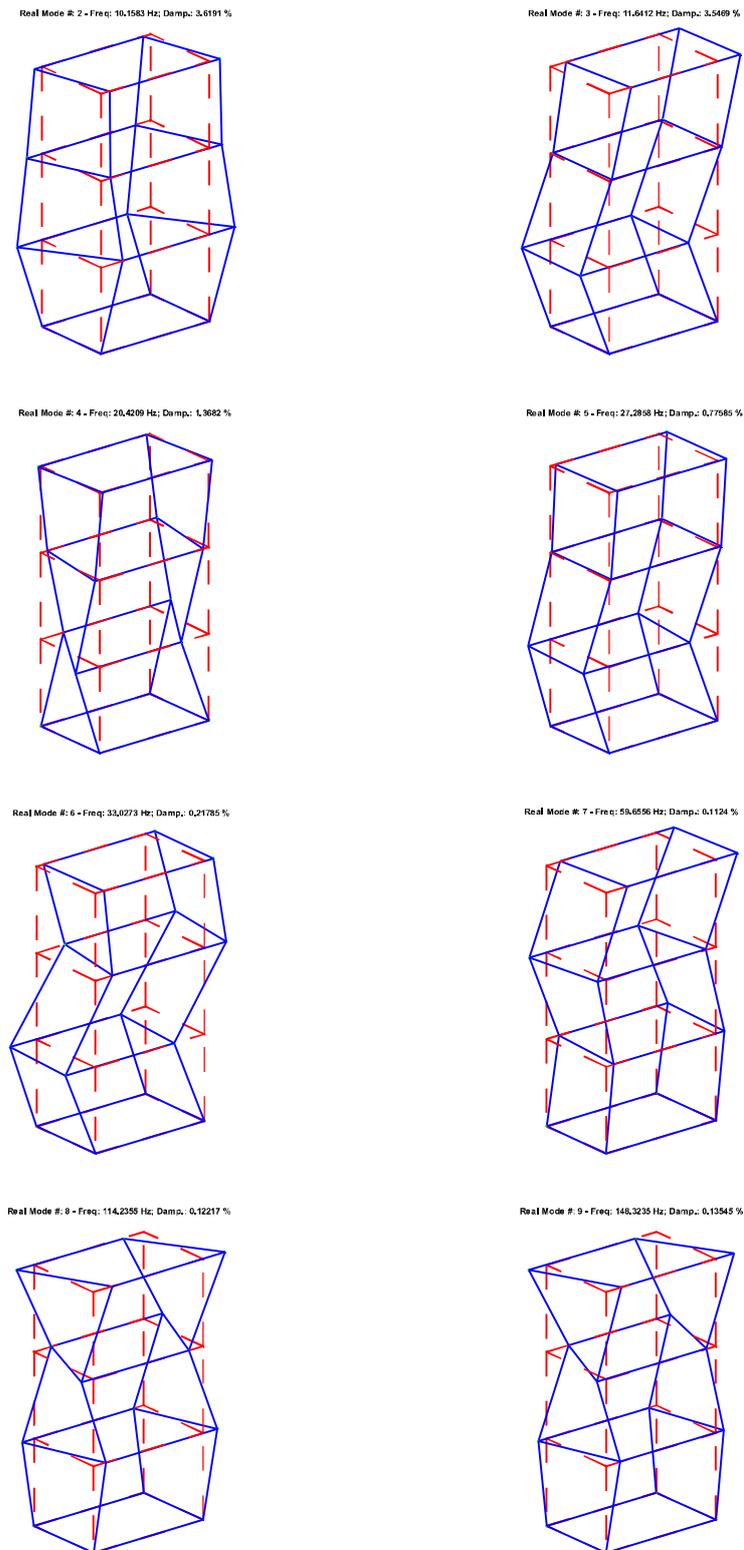


图 5-16 LSCF 法识别三层框架结构模型的模态振型
 Fig.5-16 Mode shapes of the 3 story frame model for the LSCF

第六章 总结与展望

6.1 总结

本论文对于最小二乘复频域法进行了深入研究，并对其软件实现进行了研究，为今后应用这种方法打下了理论和实践基础。

论文对最小二乘复频域法、其多参考点形式以及仅有输出响应情况下的算法进行了详尽推导；对仅有输出响应情况下的算法作出了改进，以适用于环境激励中含有周期激励成分的情况；对最小二乘复频域法、最小二乘复指数法以及其它的频域法进行了算法比较；对实现过程中的有关数值问题进行了研究；给出了最小二乘复频域法-最小二乘频域法软件实现的算法流程。

论文对基于奇异值分解的降噪方法进行了研究。为降低算法复杂度，提出叠盖平均处理的方法；针对重构 Hankel 矩阵，提出确定奇异值矩阵秩的经验阈值公式；并采用数值仿真算例验证其有效性。

采用 Matlab 语言开发了模态分析软件 **E&OMAS**，包括文件管理、结构及自由度编辑、预处理（SVD 降噪、传递函数估计）、波谱显示、参数识别、模态模型验证、模态归一、振型动画等功能。

最后以圆板和三层框架模型作为分析对象，对本文提出的方法作了试验验证。

6.2 论文的创新点

本文的创新点有：一、对仅有输出响应的最小二乘复频域法进行了改进，以适用于环境激励中含有周期激励信号的情况；二、提出叠盖平均处理方法降低基于奇异值分解降噪算法的时间复杂度；三、提出经验阈值公式自动确定重构 Hankel 矩阵时的奇异值矩阵的秩。

6.3 进一步的工作

模态参数识别的研究随着各个学科领域的发展而不断深入，有待研究的问题还很多。在本论文的基础上，认为还有如下问题有待进一步的研究：一、对非平稳环境激励下的模态参数识别进行研究；二、对模态参数估计的统计特性进行研究；三、对频域法中的泄漏问题解决办法进行研究；四、针对环境激励下的模态参数识别情况，对如何得到质量归一化的振型进行研究。

参考文献

- [1] 傅志方, 华宏星, 模态分析理论与应用, 上海:上海交通大学出版社, 2000.07.
- [2] Hoon Sohn, Charles R. Farrar, Francois M. Hemez, et al., A review of structural health monitoring literature: 1996-2001. Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS, 2003.
- [3] 应怀樵, 刘进明, 敖清波等, 火箭激振钱塘江大桥模态试验分析, 见 应怀樵主编, 现代振动噪声技术(第2卷), 北京: 航空出版社, 2000:186-192.
- [4] Pappa, R., Independent analysis of the space station nodemodal test data, Proc. of the 16th IMAC, Feb, 1998.
- [5] Van der Auweraer, H., Liefoghe, C., Debille, J., Comparative study of excitation and parameter estimation techniques on a fully equipped car, Proc. of the 11th IMAC, Feb.,1993:627-633.
- [6] 杨超, 范士娟, 刘常宝, ZJ15 型钻机底座水平方向模态试验研究, 石油矿场机械, 31(5), 2002: 50-52.
- [7] 罗剑斌, 袁立平, 郑万泔等, 汽轮机整圈连接叶片轮系振动模态试验与研究, 发电技术, 35(7),2002. 8-12.
- [8] James G.H., Crane T.G, Lauffer J.P., The Natural Excitation Technique (NEXt) for modal parameter extraction from operating wind turbines, SANDIA REPORT SAND92-1666·UC-261.
- [9] Van der Auverear, Hermans, L., Application of structural modal identification during normal operation conditions: an overview of the EUROKA Project SINOPSYs, Proc. of 17th IMAC, 1999:37-34.
- [10] Richardson, M.H., Formenti, D.L., Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials. Proc. of the 1st IMAC, 1982: 167-181.
- [11] Richardson, M.H., Formenti, D.L., Global curveFitting of frequency response measurements using the rational fraction polynomial method. Proc. of the 3rd IMAC, 1985: 390-397.
- [12] Formenti, D.L., Richardson, M.H., Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials (twenty years of progress), Proc. of the 20th IMAC, 2002: 373-382.
- [13] (比利时) Heylen, W., Lammens, S., Sas, P. 原著 白化同, 郭继忠, 译 模态分析理论与试验, 北京: 北京理工大学出版社. 2001.06.

- [14] Brincker, R., Zhang, L., Anderson, P., Modal identification from ambient response using frequency domain decomposition, Proc. of the 18th IMAC, Feb., 2000:625-630.
- [15] Peeters, B. System identification and damage detection in civil engineering. [PhD Dissertation] Department of Civil Engineering, K.U.Leuven, Belgium, Dec., 2000.
<http://www.bwk.kuleuven.ac.be/bwm>
- [16] Allemang, R.J., Modal analysis – where do we go from here? Proc. of the 11th IMAC, 1993.
- [17] Verboven, P., LMS PolyMAX – A Revolution in modal parameter estimation, Sound and Vibration, 2004.
- [18] Van der Auweraer, H., Structural dynamics modeling using modal analysis: applications, trends and challenges, Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. Budapes, Hungary, May., 2001.
- [19] Pappa, R., James III, G., Zimmerman, D., et al., Autonomous model identification of the space shuttle tail rudder, Proc. of ASME Design Engineering Technical Conference, DETC97/VIB-4250, 1997.
- [20] Chhipwadia, K., Zimmerman, D., James III, G., Evolving autonomous model parameter estimation, Proc. of the 17th IMAC, 1999:819-825.
- [21] 李中付, 环境激励下线性结构模态参数识别, [博士学位论文], 上海:上海交通大学, 2002.
- [22] Doebling, S.W., & Farrar, C.R., Estimation of statistical distributions for modal parameters identification from averaged frequency response function data, Journal of Vibration and Control, July 2000.
- [23] Pintelon, R., Schoukens, J., Vandersteen, G., Frequency domain system identification using arbitrary signals, IEEE Transactions on Automatic Control, 43(12), 1997:343-347.
- [24] Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboven, P., Identification of modal parameters including unmeasured forces and transient effects, Journal of Sound and Vibration, (265)2003:609-625.
- [25] Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboven, P., et al. Frequency response function-based parameter identification from short data sequences, Mechanical Systems and Signal Processing, (18)2004:1097-1116.
- [26] 刘 索, Laplace 小波在颤振试验信号分析中的应用, [硕士学位论文], 西安:西北工业大学 2002:20-22.

- [27] Vecchio, A., Peeters, B., Van der Auweraer, H., Modal parameters extraction from in-flight measured data for aircraft flutter clearance, CD of LMS aerospace cases & technical papers, 2004.
- [28] Cauberghe, B., Guillaume, P., Dierckx, B., et al. Identification of modal parameters from inconsistent data, Proc. of the 20th IMAC, 2002:809-815.
- [29] Van der Auweraer, H., Leurs, W., Mas, P., et al., Modal parameter estimation from inconsistent data, Proc. of the 19th IMAC, 2000:763-771.
- [30] Allemang, R.J., Vibrations: Experimental modal analysis. course notes, seventh edition, structural dynamics research laboratory, University of Cincinnati, OH. uc-sdrl-cn-20-263-663/664 June 7, 1999. http://www.sdrl.uc.edu/course_info.html
- [31] Verboven, P., Cauberghe, B., Parloo, E., et al. User-assisting tools for a fast frequency-domain modal parameter estimation method, Mecha. Syst. and Sig. Processing, (18), 2004:759-780.
- [32] Van der Auweraer, H., Guillaume, P., Verboven, P., et al., Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 123(4), 2001:651-658.
- [33] Guillaume, P., Verboven, P., Vanlanduit, S., et al. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator, Proc. of the 21st IMAC, Kissimmee (FL), USA, Feb., 2003.
- [34] Peeters, B., Guillaume, P., Van der Auweraer, H., et al., Automotive and aerospace applications of the polyMAX modal parameter estimation method, Proc. of the 22nd IMAC, Dearborn(ML), USA, Jan., 2004.
- [35] Guillaume, P., Hermans, L., Van der Auweraer, H., Maximum likelihood identification of modal parameters from operational data, Proc. of the 17th IMAC, Orlando, FL. Feb., 1999:1887-1893.
- [36] Verboven, P., Cauberghe, B., Guillaume, P., et al., Modal parameter estimation and monitoring for on-line flight flutter analysis, Mecha. Syst. and Sig. Processing, (18), 2004:587-610.
- [37] Pintelon, R., & Kollar, I., On the frequency scaling in continuous-time modeling, Proc. of the IMTC 2004 – Instrumentation and Measurement Technology Conference, Como, Italy, 18-20 May, 2004.
- [38] Brewer, J.W., Kronecker products and matrix calculus in system theory, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-25, No. 9, Sept. 1978:772-781.

- [39]Mohanty, P., & Rixen, D.J., Modifying the ERA identification for operational analysis in the presence of harmonic perturbations, Proc. of the 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, University of Washington, Seattle, July, 2003.
- [40]Mohanty, P., & Rixen, D.J., Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation, Journal of Sound and Vibration, (270), 2004:93-109.
- [41]岳林, 张令弥, 脉冲激励下信号去噪新方法研究和仿真, 机械工程学报, 16(3), 2003.09:335-338.
- [42]Sanliturk, K.Y., & Cakar, O., A new method for noise elimination from measured frequency response function. <http://www.icats.co.uk/pubs/elnoise.pdf>
- [43]王海, 模态参数识别中噪声模态的研究, [硕士学位论文], 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2000:13-14.
- [44]Johnson, R., MATLAB programming style guidelines, Ver.1.5, Cct., 2002. <http://www.mathworks.com>
- [45]Doebling, S.W. Farrar, C.R., Cornwell, P.J., Development of a general purpose code to couple experimental modal analysis and damage identification algorithms, 1998. <http://www.lanl.gov>
- [46]Balmes, E., Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization, Proc. of the 14th IMAC, 1996.
- [47]Zadeh, J.C., Fuzzy logic toolbox for user with Matlab, Version 2, June 2004. <http://www.mathworks.com>

致 谢

论文是在北京邮电大学刘晓平教授、东方振动和噪声技术研究所应怀樵教授的悉心指导下完成的。两位导师渊博的知识、严谨的治学态度、精辟的学术见解、高尚的师德和忘我的敬业精神一直深深地影响和激励着我，成为我人生道路上宝贵的财富之一。导师不仅在学术上给予我悉心的指导和帮助，而且在生活上也给予我诸多关怀和帮助，在此向他们表示真诚的感谢和崇高的敬意。

在论文完成过程中，得到了东方振动和噪声技术研究所谭静、冯行生、聂恒仁等工程师的热忱帮助，特别是赵增欣、武颖奎、刘维瑾等工程师在试验方面给予的悉心指导和帮助，在此表示衷心的感谢。

在三年学习中，东方振动和噪声技术研究所刘进明高工、沈松博士；东北大学李鹤博士、朱启兵博士；交通部科学院刘文峰博士；以及同实验室张家堂、廉克峰、刘晓龙、罗强、张丽娟同学等从不同方面给予我不少启发，在此表示真诚的感谢。

为了我的成长，父母亲默默无闻、不求回报、无私地倾注了大量的心血和精力，任何感激的语言和文字在他们的面前都显得苍白和无力，衷心祝愿他们健康、快乐。同时也要感谢我的二姐董书兰、女友翟莹及其家人对我的关心、支持和鼓励。

最后还要感谢 LMS 公司北京代表处在文献资料方面提供的帮助。

董书伟
二〇〇五年二月
北京邮电大学

攻读学位期间发表的学术论文及参与的部分试验

发表的论文

- [1] 董书伟, 刘晓平, 应怀樵. SVD 降噪方法在模态阻尼参数识别中的应用, 振动工程学报(增刊), 2004.08.

参与的部分工程试验

- | | |
|------------------------|------------------|
| [1] 大连大学钟楼模态测试 | 2003.11.19-11.20 |
| [2] 联想台式机机箱模态测试 | 2004.04.20-04.21 |
| [3] 清华大学机械工程系某合金材料阻尼测试 | 2004.05.17-05.20 |
| [4] 河南濮阳中原油田管道振动测试 | 2004.07.15-07.19 |
| [5] 上海地铁一号线列车行车试验 | 2004.10.19-11.18 |

联系方式：

董书伟
北京科尚仪器技术有限公司
KINGSCI INSTRUMENTS
www.chinaksi.com
dongsw@chinaksi.com
136 4117 1664